...और ३२४ ... की

...एक ग्राममें पुलिस ने साधुओं ...द कर दिया और उपस्थित लोगों ... चलादी।

...ागाली सत्याग्रह जारी है। करीब एक ...स्वयंसेवक गिरफ्तार हो चुके हैं।

...पुरके ५ स्वयंसेवक शस्त्रों से सुसज्जित हो ... साम्यमूर्ति का स्वागत करने के लिये ... पर गये। इन पांचों पर मुक़द्दमा चलाया ...नमें से ४ को १५–१५ दिन की तथा एक ...महीने की सजा का हुक्म मिला।

...र में २० जून को खिलाफत कमेटी के ...में एक बड़ा भारी जलसा हुआ। करीब ...लंटियर इसलिये भर्ती किये गये ताकि ...यद दिलावर शाह बुखारी और मि० ...इ के नक्शे कदम पर चलकर गिरफ्तार ...हैं।

...रमें गर्म अफवाह है कि 'अलाम्रान' पत्र ...लिम आउटलुक' से भी सख्त मजमून ...लिये उसके सम्पादक और प्रकाशक ... गया है।

... सेवा दल के लिये

...में छपाया है जिसमें कहा गया है कि देहली के मुसलमानों ने कुर्बानी के सम्बन्ध में अपनी हक़ प्राप्त करने के लिये सरकार को नोटिस दिया है और वे सरकार व पुलिस पर इस तरह हकतलफी और मज़हबी मदाखलत के विरुद्ध दावे करने वाले हैं।

—ढाका ज़िले के मुकुदेही नामक ग्राम में मुसलमानों के दो दलों में आपस में झगड़ा होगया। दोनों तरफ के अनेक व्यक्ति घायल हुए।

—अमरीका की अत्यन्त सुन्दर अभिनेत्री ने एक ब्रिटिश बीमा कम्पनी से अपनी मुस्कराहट का ७० ०००) रु० का बीमा कराया है। दस वर्ष के अन्दर किसी कारण से मुस्कराहट का सौन्दर्य नष्ट होने पर कम्पनी को उपर्युक्त रुपया देना होगा।

—कानपुर में एक हिन्दू और मुसलमान जाली सिक्कों के सम्बन्ध में गिरफ्तार हुए हैं।

—आन्ध्र देश की ओर से नागपुर सत्याग्रह की परिस्थिति देखने के लिये श्रीयुत साम्यमूर्ति नागपुर पधारे हैं।

—दक्षिण अफ्रीका का झंडा एक दम नये ढंग का होगा। ब्रिटिश झंडा बीच में होगा और चारों

—२६, २७, २८ जून १९२... चौ० सूरजपालसिंहजी रईस ...जिले में तोमर क्षत्रिय सभा ... सभा में प० गोविन्दप्रसाद... साहित्योपाध्याय प० ... मेयो कालिज अजमेर, प० ... ज्योतिषी आदि के व्याख्यान हुए ... सूरजपालसिंहजी के सुपुत्र कुं... कुं० माधवसिंहजी के यज्ञोप... हुए।

—१३ मई को शाहपुरा महल ... दरबार हुआ। जिसमें लेफ्टीनें... पोलीटिकल एजेंट बहादुर ... श्रीमान् वायसराय महोदय की ... राज सर नाहरसिंहजी के० ... शाहपुराधीश को सनद ... अनुसार श्री जी हुजूर को ए... जनरल साहब बहादुर राजपू... लिये बिना ही किसी अपराध ... क़ैद या मृत्यु दंड देने तक का ...

—आर्य जगत् में ...

दुःख होगा कि श्री ... संसार में नहीं हैं।

प्रेमदत्त शर्मा

॥ श्रीः ॥

काशी-संस्कृत-सीरिज़

८१

गणितविभाग (१) प्रथम पुष्प

॥ श्रीः ॥

मध्यमा प्रथम खण्ड (साधारणपत्र)
भिन्न तथा त्रैराशिक के साधारण प्रश्न के लिये

गणितकौमुदी

(द्वितीय भाग)

अनेक प्रकार के उदाहरण तथा प्रश्नों
से युक्त मध्यमा परीक्षा में नियत
गणित विषय का संग्रह।

प्रकाशकः—

जयकृष्णदास हरिदास गुप्तः—
चौखम्बा संस्कृत सीरिज़ आफिस,
बनारस सिटी।

१९९६

निज प्रकाशित मध्यमा परीक्षा पाठ्य-ग्रन्थ—

१ सिद्धान्तकौमुदी-(कारकान्त) व्याकरणाचार्य पं० गोपालशास्त्री नेने (प्रोफेसर ग० सं० कालेज काशी) विरचित सरला टीका एवं सरल रूपलेखनप्रकार-फक्किका(पङ्क्ति)लेखनप्रकार—उदाहरण के अर्थ (हिन्दी में) सूत्रसूची, वार्त्तिकसूची, परिभाषासूची, गणसूची आदि परिशिष्ट से सुशोभित। नवीन संस्करण १।)

२ रघुवंशमहाकाव्य-मल्लिनाथी टीका तथा पं० श्रीकनकलालठक्कुर विरचित परीक्षोपयोगी अर्थप्रकाशिका टीका सहित १-३ सर्ग ।=) १-५ सर्ग ।≡)

३ रघुवंशमहाकाव्य-अत्युत्तम परीक्षोपयोगी सुधानाम्नीटीका तथा मल्लिनाथीटीका सहित। मल्लिनाथकृत संजीविनीटीका अन्वय-सुधाव्याख्या-कोश-समासादि-व्याकरण-वाच्यपरिवर्तन-तात्पर्यार्थ-हिन्दी-भाषार्थ—पौराणिककथायें-टिप्पणियां—संक्षिप्तकथायें परीक्षोपयोगी प्रश्नपत्र सहित। १-५ सर्ग १।) ६-१० सर्ग १।) १-१० सर्ग २॥) २-५ सर्ग ।।।) २-३ सर्ग ।≡) १-४ सर्ग १)

४ रघुवंशमहाकाव्य-मल्लिनाथी टीका सहित। सम्पूर्ण १)

५ नागानन्दनाटक-परीक्षोपयोगी भावार्थदीपिका संस्कृतटीका-हिन्दीअनुवाद सहित १।)

६ वृहत् संस्कृतशिक्षावाटिका १-३ भाग—संस्कृत से हिन्दी तथा हिन्दी से संस्कृत अनुवाद के लिए अत्यन्त उपयुक्त ।।।)

७ विदुरनीति ३-८ अध्याय—अन्वय-समास-कोष-भावार्थ-भाषार्थ आदि सम्पूर्ण विषयों से युक्त 'तत्त्वार्थदर्शिनी' तथा 'सरलार्थबोधिनी' नामक परीक्षोपयोगी टीका के सहित। अद्वितीय संस्करण ।=)

८ अमरकोश-'मणिप्रभा'-'अमरकौमुदी' नामक परीक्षोपयोगी भाषाटीका तथा टिप्पणी विस्तृत भूमिका विषयसूची व शब्दसूची सहित सम्पूर्ण २)

९ अमरकोश—द्वितीयकाण्ड—"मणिप्रभा"—तथा "अमरकौमुदी" नामक परीक्षोपयोगी भाषाटीका तथा टिप्पणी सहित। ।=)

१० अमरकोश-अनेकार्थध्वनिमञ्जरी-द्विरूपकोश-एकाक्षरकोश सहित मूल सम्पूर्ण गुटका ।) केवल द्वितीयकाण्ड मूल =)

११ मध्यकौमुदी-अत्युत्तम सरल परीक्षोपयोगी वृहद् टिप्पणी सहित १।)

१२ पञ्चतन्त्र-निषिद्ध अश्लील अंश वर्जित परीक्षोपयोगी विषम-स्थल बोधिनी विवृत्ति सहित। प्रथमतन्त्र ≡) द्वितीय =) तृतीय ≡) चतुर्थ =) पञ्चम =) सम्पूर्ण १-५ तन्त्र ।।)

३०५-३. प्रेमदत्त शर्मा व्या० म० प्र० खं०

THE

KASHI SANSKRIT SERIES

(*HARIDĀS SANSKRIT GRANTHAMĀLĀ*)

NO. 81.

(Mathematical Section, No. 1)

THE

GAṆITA KAUMUDĪ

WITH

EXAMPLES, QUESTIONS & ANSWERS

For the use of the Students of Madhyamā Examinations

By

SĀHITYĀCHĀRYA

PT. GAṆAPATIDEVA S'ĀSTRĪ

Son of

LATE M. M. PT. BAPUDEVA ṢĀSTRI. C. I. E.,

Edited by the Author

(PART II)

PUBLISHED BY

JAYA KRISHNA DÂS HARIDÂS GUPTA

The Chowkhamba Sanskrit Series Office.

Benares City.

1939.

All Rights Reserved by the Publishers.

PRINTED BY
JAYA KRISHNA DAS GUPTA,
VIDYA VILAS PRESS, BENARES CITY.

1939.

* श्री *

काशी-संस्कृत-सीरिज़

८१

गणितविभाग (१) प्रथम पुष्प ।

* श्रीः *

गणितकौमुदी

(द्वितीय भाग)

अनेक प्रकार के उदाहरण तथा प्रश्नों से युक्त मध्यमा परीक्षाओं में नियत गणित विषय का संग्रह ।

रचयिता—

ज्यौतिषाचार्यवर्य महामहोपाध्याय

श्री ६ मदूबापूदेव शास्त्री के पुत्र

साहित्याचार्य—

पण्डित गणपतिदेवशास्त्री ।

प्रकाशकः—

चौखम्बा-संस्कृत-पुस्तकालय,

बनारस सिटी ।

वि० संवत् १९९६] [मूल्य ६ आना ।

प्राप्तिस्थानम्—
चौखम्बा संस्कृत पुस्तकालय,
बनारस सिटी।

भूमिका

श्री भगवती की कृपा से गणित कौमुदी का यह द्वितीय भाग भी आज प्रकाशित हो रहा है।

इसमें गणित के निम्नलिखित विषय सरल सुबोध भाषा में उदाहरण सहित अच्छी तरह से समझाये गये हैं—यौगिक संख्या, रूढसंख्या, रूढगुणनखण्ड. रूढसंख्या की पहचान, अपवर्त्तन के कुछ नियम. महत्तमसमापवर्त्तक, लघुतमापवर्त्य, भिन्नसंख्याव्युत्पादन, भिन्नसंख्या का रूपान्तर, भिन्नसंख्याओं का न्यूनाधिक भाव, भिन्न संख्याओं का सङ्कलन, व्यवकलन. गुणन, भाग, महत्तमापवर्त्तक और लघुतमापवर्त्य, कोष्ठों का प्रयोग. विततभिन्न और उसको सङ्क्षिप्त रूप में लाने का प्रकार. भिन्न संख्याओं को सरल करने का नियम भिन्न संख्याओं का रूप भेद गुणोत्तर और अनुपात, त्रैराशिक, बहुराशिक, काल, कार्य और गति विषयक उदाहरण, तथा अन्त में साधारण ब्याज का निरूप ।

गणित का विषय समझना और समझाना, दोनों ही रीति की सुगमता और नियमों की शुद्धता पर निर्भर करता है। हमने गणित सम्बन्धी दो एक पुस्तकें हाल में ही प्रकाशित ऐसी देखी जिनमें इन बातों का विचार नहीं रखा गया है, जो नियम बतलाये गये हैं वे निर्दोष नहीं और जो उदाहरण और रीतियां दी गयी हैं उनमें भी बहुत सी अशुद्धियां हैं जिससे विद्यार्थी भ्रम में पड सकते हैं। गणित

का विषय इससे अधिक सावधानी और एकाग्रता के साथ लिखा जाना चाहिये और प्रतिपादन की शैली भी इतनी सुगम होनी चाहिये कि पुस्तक हाथ में लेकर विद्यार्थी उसे अनायास समझ सकें। इसी दृष्टि से यह पुस्तक तैयार की गयी है। अध्यापक और विद्यार्थी दोनों ही इस पुस्तक में हमारे कथन की सत्यता को अनुभव करेंगे।

इस पुस्तक के तैयार करने में परीक्षाओं का भी पूरा ध्यान रखा गया है और जिन जिन विषयों का जानना परीक्षा में उत्तीर्ण होने के लिये आवश्यक है। वे सब विषय इसमें अच्छी तरह से समझा दिये गये हैं। इस दृष्टि से भी पुस्तक सबके लिये उपयोगी होगी।

विद्यार्थियों को गणित जैसा कठिन विषय सरल करके समझाने, प्रश्नों को हल करने की सिद्ध रीतियां बतलाने और परीक्षादि की आवश्यकताओं की पूर्ति करने का इस पुस्तक के द्वारा जा प्रयास किया गया है वह सबके लिये शुभ हो, यही भगवती से प्रार्थना है। हमारे इस कार्य में उत्तरमाला बनाने में हमारे मित्र पं० जनार्दन वासुदेव शास्त्री खुंटे ने हमारी जो सहायता की उसके लिये हम इनके कृतज्ञ हैं और प्रकाशक ने पुस्तक का शुद्ध छापने का कार्य जिस सावधानी और परिश्रम के साथ किया उसके लिये वे भी धन्यवाद के पात्र हैं।

॥ इति शम् ॥

* श्रीः *

गणितकौमुदी

द्वितीय भाग

सिन्दूरसुन्दरतनोर्नवचन्द्रमौले-
विंघ्नावलीतिमिरवासरनायकस्य ।
वाञ्छाधिकं वितरतो दयया नतेभ्यो
नागाननस्य चरणाम्बुजमाश्रयामः ॥ १ ॥
पण्डितमण्डलमण्डनबापूदेवोद्भवः प्रथमं ।
गणपतिशास्त्री कृत्वा पूर्वार्द्धं गणितकौमुद्याः ॥ २ ॥
अधुना तदुत्तरार्द्धं ह्यवं मध्यमपरीक्षणश्रेण्यां ।
अधितिष्ठतां वितनुते छात्राणां बोधजननाय ॥ ३ ॥

यौगिकसंख्या, रूढसंख्या और रूढगुणनखण्ड

(७६) जो संख्या १ को और स्वयं उस संख्या को छोड़ कर किसी दूसरी संख्या से पूरी विभाजित होती है उसको **यौगिकसंख्या** वा **अदृढसंख्या** कहते हैं। जैसे, ४, ६, ९ इत्यादि यौगिक संख्या हैं।

(७७) जो संख्या १ को और स्वयं उस संख्या को छोड़ कर किसी दूसरी संख्या से पूरी विभाजित नहीं होती है उसको **रूढसंख्या** वा **दृढसंख्या** कहते हैं। जैसे, १, २, ३, ५ ७ इत्यादि रूढ संख्या हैं।

(७८) २ और ५ को छोड़ कर जितनी रूढ संख्याएँ होंगी, उनके इकाई के स्थान में १, ३, ७ और ९ इनमें से कोई एक अङ्क अवश्य रहेगा।

(७९) दो संख्याओं में छोटी संख्या का बड़ी संख्या में भाग देने से यदि कुछ शेष न रहे, तो उस छोटी संख्या को बड़ी संख्या का **गुणनखण्ड**, **उत्पादकअवयव** वा **अपवर्तक** कहते हैं। और बड़ी संख्या को छोटी संख्या का **अपवर्त्य** कहते हैं। जैसे १२ और ४ इन दो संख्याओं में १२ यह ४ से पूरी विभाजित होती है, इस लिये १२ का ४ अपवर्तक, और ४ का १२ अपवर्त्य होता है।

(८०) जब कि प्रत्येक संख्या १ से पूरी विभाजित होती है, तब प्रत्येक संख्या का १ अपवर्तक, और १ का अपवर्त्य प्रत्येक संख्या होगी। परन्तु अपवत्य और अपवर्तक इन दो शब्दों का व्यवहार उन्हीं दो संख्याओं में होता है, जिनमें छोटी संख्या १ नहीं होती है।

(८१) जो संख्या दो वा अधिक संख्याओं में से प्रत्येक से निःशेष विभाजित होती है, उस संख्या को उन दो वा अधिक संख्याओं का **समापवर्त्य** कहते हैं।

जैसे, ३६ यह संख्या ३, ४, ६ इन संख्याओं का समापवर्त्य है।

(८२) यदि अनेक संख्याओं का एक अपवर्तक हो, तो उसको उन संख्याओं का **समापवर्तक** कहते हैं।

जैसे, २४ और ३६ का ४ यह समापवर्तक होता है।

(८३) जब कोई यौगिक वा अदृढ संख्या किसी दूसरी संख्या से पूरी विभाजित होती है, तब उस भाजक और लब्धि को उस यौगिक संख्या के **अवयव** कहते हैं। जैसे, १८ के ९ और २ यह अवयव हैं। और यदि उन अवयवों की संख्या रूढ हो, तो उनको **रूढअवयव** वा **रूढगुणनखण्ड** कहते हैं।

(८४) १, २, ३, ४, इत्यादि क्रमिक संख्याओं में १, ३, ५, ७ आदि संख्याओं को क्रमिक विषमसंख्या, और २, ४, ६, ८ आदि संख्याओं को क्रमिक समसंख्या कहते हैं। इस लिये जो संख्या २ से पूरी बट जाती है, उसको **समसंख्या**, और जो संख्या २ से पूरी विभाजित नहीं होती, उसको **विषमसंख्या** कहते हैं।

(८५) किसी यौगिक संख्या के रूढ गुणनखण्ड निकालने के लिये नीचे

दिये हुए सिद्धान्त बहुत उपयोगी होते हैं:—

(१) जिसके एक स्थान का अङ्क शून्य होगा अथवा वह २ से निःशेष होगा, वह संख्या २ से निःशेष होगी। जैसे, ७४ इसके एक स्थान का अङ्क ४ यह २ से निःशेष होता है इस लिये ७४ यह संख्या भी २ से निःशेष होगी।

(२) जिस संख्या के सब अङ्कों का योग ३ से निःशेष होगा वह संख्या ३ से निःशेष होगी। जैसे, ३२१ इस संख्या के सब अङ्कों का योग ६ यह ३ से निःशेष होता है इसलिये उक्त संख्या भी ३ से निःशेष होगी।

(३) जिस संख्या की दाहिनी ओर के दो अङ्कों से बनी हुई संख्या ४ से निःशेष होगी अथवा जिसकी दाहिनी ओर दो शून्य होंगे वह सम्पूर्ण संख्या ४ से निःशेष होगी। इसी तरह जिस संख्या की दाहिनी ओर के तीन अङ्कों से बनी हुई संख्या ८ से निःशेष होगी अथवा जिसकी दाहिनी ओर तीन शून्य होंगे वह सम्पूर्ण संख्या ८ से निःशेष होगी। जैसे, ३२४ इस संख्या की दाहिनी ओर के दो अङ्कों से बनी हुई संख्या २४ यह ४ से निःशेष होती है इस लिये उक्त संख्या भी ४ से निःशेष होगी। इसी तरह ५२२४ इसकी दाहिनी ओर के तीन अङ्कों से बनी हुई संख्या २२४ यह ८ से निःशेष होती है इस लिये उक्त संख्या भी ८ से निःशेष होगी।

(४) जिस संख्या के एक स्थान में ० वा ५ होंगे वह संख्या ५ से निःशेष होगी। जैसे, ७०, ९५ यह दोनो संख्याएं ५ से निःशेष होती हैं।

(५) जिस संख्या के सब अङ्कों का योग ९ से निःशेष होगा वह संख्या ९ से निःशेष होगी। जैसे, ८४६ इस संख्या के सब अङ्कों का योग १८ यह ९ से निःशेष होता है इसलिये उक्त संख्या ९ से निःशेष होगी।

(६) जिस संख्या की दाहिनी ओर एक, दो, तीन आदि शून्य होंगे वह संख्या क्रम से १०, १००, १००० आदि संख्याओं से निःशेष होगी। जैसे, ७०, ९००00 यह दोनो संख्याएं क्रम से १० और १०००० से निःशेष होती हैं।

(७) जिस संख्या के, पहिला, तीसरा, पांचवां इत्यादि विषमस्थानों के अङ्कों के योग का और दूसरा, चौथा, छठवां इत्यादि समस्थानों के अङ्कों के योग का अन्तर शून्य होगा, अथवा वह अन्तर ११ से निःशेष होगा तो वह संख्या ११ से निःशेष होगी। जैसे, ६९५७५ इस संख्या के विषम स्थानों के अङ्क ५, ५,

६ इनका योग १६ और समस्थानों के अङ्क ७, ९ इनका योग १६ इन दोनों योगों का अन्तर शून्य है इसलिये उक्त संख्या ११ से निःशेष होगी। इसी प्रकार ५६५२६१४ इस संख्या के विषम स्थानों के अङ्क ४, ६, ५, ५ इनका योग २० सम स्थानों के अङ्क १, २, ६ इनका योग ९ इन दोनों योगों का अन्तर ११ यह ११ से निःशेष होता है, इस लिये उक्त संख्या ११ से निःशेष होगी।

(८) कोई संख्या ७ से ११ से वा १३ से निःशेष होगी वा नहीं इसका निर्णय इस तरह किया जाता है:—निर्दिष्ट संख्याके अङ्कों को दाहिनी ओर से जहां तक सम्भव हो तीन तीन अङ्कों के समूहों में विभक्त करो। तब पहिला, तीसरा, पांचवां इत्यादि विषम समूहों के योग का और दूसरा, चौथा इत्यादि सम समूहों के योग का अन्तर यदि शून्य होगा, अथवा वह अन्तर ७ से ११ से वा १३ से निःशेष होगा तो निर्दिष्ट संख्या ७ से ११ से वा १३ से निःशेष होगी। जैसे, २९१४३५७०४ इस संख्या में ७०४, २९१ यह विषम समूह हैं, इनका योग ९९५ और सम समूह ४३५ यह एक ही है और ९९५, ४३५ इनका अन्तर ५६० यह ७ से ही निःशेष होता है ११ और १३ से निःशेष नहीं होता है इस लिये उक्त संख्या ७ से ही निःशेष होगी। इसी तरह ६४३४५३५८ इस संख्या में विषम समूह ३५८, ६४ यह दो हैं, इनका योग ४२२ और ३४५ यह सम समूह है, इनका अन्तर ७७ यह ७ और ११ से निःशेष होता है इसलिये उक्त संख्या ७ और ११ से निःशेष होगी।

(९) जिस आठ अङ्कों की संख्या में पहिले चार अङ्क क्रम से उनके आगे के चार अङ्कों के समान होंगे वह संख्या ७३ और १३७ इन दोनों संख्याओं से निःशेष होगी। जैसे, ७३२१७३२१ इस संख्या में पहिले चार ७३२१ यह अङ्क क्रम से इनके आगे के ७३२१ इन चार अङ्कों के समान हैं इसलिये उक्त संख्या ७३ और १३७ इन दोनों संख्याओं से निःशेष होगी।

(१०) जिस सात अङ्कों की संख्या में पहिले तीन अङ्क क्रम से अन्तिम तीन अङ्कों के तुल्य होंगे और उनके बीच में शून्य होगा वह संख्या ७३ और १३७ इन दोनों से निःशेष होगी। जैसे, ३७१०३७१ यह संख्या ७३ और १३७ इन दोनों से निःशेष होगी।

(११) जिस छ अङ्कों की संख्या में पहिले दो अङ्क क्रम से अन्तिम दो

अङ्कों के तुल्य होंगे और उनके बीच में दो शून्य होंगे वह संख्या ७३ और १३७ इन दोनों से निःशेष होगी । जैसे, ९५००९५ यह संख्या ७३ और १३७ इन दोनों से निःशेष होगी ।

(१२) जिस पांच अङ्कों की संख्या में पहिला अङ्क अन्तिम अङ्क के तुल्य होगा और उनके वीच में तीन शून्य होंगे वह संख्या भी ७३ और १३७ इन दोनों से निःशेष होगी । जैसे, ५०००५ यह सख्या ७३ और १३७ इन दोनों से निःशेष होगी ।

(१३) जिस चार वा पांच अङ्कों की संख्या में पहिले दो अङ्कों की संख्या से शेष अङ्कों की संख्या दूनी होगी वह संख्या ६७ से निःशेष होगी । जैसे, ५८२९ इस संख्या में पहिले दो अङ्कों की संख्या २९ इससे दूनी शेष अङ्कों की ५८ यह संख्या है, इसलिये उक्त संख्या ६७ से निःशेष होगी । इसी तरह १४६७३ इसमें पहिले दो अङ्कों की संख्या ७३ इससे दूनी शेष अङ्कों की १४६ यह संख्या है, इसलिये उक्त संख्या ६७ से निःशेष होगी ।

(१४) जिस संख्या में पहिले दो अङ्कों की संख्या से शेष अङ्कों की संख्या तिगुनी होगी, वह संख्या ४३ से निःशेष होगी । जैसे, २४९८३ यह संख्या ४३ से निःशेष होगी ।

(१५) जिस संख्या में पहिले दो अङ्कों की संख्या से शेष अङ्कों की संख्या पांचगुनी होगी वह संख्या १६७ से निःशेष होगी । जैसे, ७५१५ यह संख्या १६७ इससे निःशेष होगी ।

(१६) जिस संख्या में पहिले दो अङ्कों की संख्या से शेष अङ्कों की संख्या आठ गुनी होगी वह संख्या ८९ इससे निःशेष होगी । जैसे, १०४१३ यह संख्या ८९ इससे निःशेष होगी ।

(१७) जिस संख्या में पहिले दो अङ्कों की संख्या से शेष अङ्कों की संख्या नौ गुनी होगी वह संख्या १७ और ५३ इन दोनों से निःशेष होगी । जैसे, २४३२७ यह संख्या १७ और ५३ इन दोनों से निःशेष होती है ।

(१८) जिस संख्या में पहिले तीन अङ्कों की संख्या से शेष अङ्कों की संख्या दूनी होगी वह संख्या २३ और २९ इन दोनों से निःशेष होगी । जैसे, ६८६३४३ इसमें २३ और २९ इन दोनों का निःशेष भाग दिया जा सकता है ।

(८६) किसी अदृढ संख्या के ऐसे दृढ खण्ड किये जा सकते हैं जिनका गुणनफल उस अदृढ संख्या के तुल्य होगा। इसका विधि—उक्त सिद्धान्तों की सहायता से उस अदृढ संख्या के पहिले ऐसे दो खण्ड करो जिनमें एक खण्ड दृढ होगा। दूसरा खण्ड यदि दृढ न होगा तो उसके भी इसी प्रकार के दो खण्ड करो। ऐसा तब तक करो जब तक दूसरा खण्ड दृढ न होगा। इस प्रकार जो खण्ड उत्पन्न होंगे उनका गुणनफल उस अदृढ संख्या के तुल्य होगा।

उदाहरण, (१) ६७७८२ इस संख्या के ऐसे खण्ड करो जिनका गुणनफल उक्त संख्या के तुल्य होगा।

यहां उक्त संख्या सम है, इसलिये (१) सिद्धान्त के अनुसार यह २ से निःशेष होगी। इसलिये ६७७८२ = २ × ३३८९१। फिर ३३८९१ इसके सब अङ्कों का योग ३ से निःशेष होता है, इसलिये (२) सिद्धान्त के अनुसार यह ३ से निःशेष होगी, इसलिये ३३८९१ = ३ × ११२९७। फिर ११२९७ इसके विषम स्थानों के अङ्कों के योग का और सम स्थानों के अङ्कों के योग का अन्तर शून्य होता है, इसलिये (७) सिद्धान्त के अनुसार यह ११ से निःशेष होगी, इसलिये ११२९७ = ११ × १०२७। फिर १०२७ इसमें विषम समूह ०२७ और सम समूह १ इनका अन्तर २६ यह १३ से निःशेष होता है, इसलिये (८) सिद्धान्त के अनुसार यह १३ से निःशेष होगी, इसलिये १०२७ = १३ × ७९। यहां दूसरा खण्ड ७९ यह दृढ है, इसलिये उक्त संख्या के ६७७८२ = २ × ३ × ११ × १३ × ७९ यह दृढ खण्ड वा दृढापवर्तक हुए।

इस प्रकार के उदाहरणों को ऊपर के नियम के अनुसार ही करने की आवश्यकता नहीं होती है। दी हुई यौगिक संख्या के जो दो अवयव तुरन्त ज्ञात हो सकें, उनको निकाल कर फिर प्रत्येक अवयव के जितने रूढ अवयव निकल सकेंगे उनको निकालना चाहिये।

उदाहरण (२) २३०४० इस संख्या के रूढ अवयव निकालो।

यहां दी हुई संख्या का १० उत्पादक अवयव है, यह तुरन्त मालूम हो सकता है।

∴ २३०४० = २३०४ × १०

और २३०४ = २५६ × ९

और २५६ = १६ × १६

∴ २३०४० = १० × ९ × १६ × १६

= ५×२ ३×३ २×२×२×२ २×२×२×२

यहां २ नौ बार और ३ दो बार आये हैं, इसलिये

$२३०४० = २^{९} × ३^{२} × ५$ ऐसा संक्षेप से लिखना अच्छा होता है।

यहां २ और ३ के ऊपर जो क्रम से ९ और २ यह अङ्क हैं, उनको घातमापक कहते हैं। क्योंकि $२^{९}$ यह स्वरूप २ को ९ वार लिख कर उन सब के घात को सूचित करता है। $२^{९}$ इसको दो का नव घात ऐसा पढते हैं। इसी तरह $३^{२}$ इसको ३ का द्विघात वा ३ का वर्ग और $५^{३}$ इसको पांच का त्रिघात वा पांच का घन ऐसा पढते हैं। और यहां घातमापक अङ्क के नीचे के अङ्क को उस घात का मूल कहते हैं। जैसे, $३^{२}$ = ३ × ३ = ९ और ९ का द्विघातमूल वा वर्गमूल ३ है। इसीतरह $७^{३}$ = ७ × ७ × ७ = ३४३ और ३४३ का त्रिघातमूल वा घनमूल सात है।

(८७) जिस संख्या का वर्ग दी हुई संख्या से कम होता है, किन्तु उसमें १ जोड़ कर उस योग का वर्ग दी हुई संख्या से अधिक होता है, उस संख्या को दी हुई संख्या का निरग्रमूल कहते हैं। जैसे, ६१ का निरग्र मूल ७ होता है, क्योंकि ७ का वर्ग ४९ यह ६१ से कम है, किन्तु ९ में १ जोड़ कर आठ का वर्ग ६४ यह ६१ से अधिक है, इसलिये ६१ का निरग्रमूल ७ होता है।

रूढसंख्या की पहचान

(८८) जो संख्या अपने निरग्रमूल से छोटी किसी संख्या से पूरी विभाजित नहीं होती है वह रूढ संख्या होती है, अर्थात् १ को छोड़ कर और स्वयं उस संख्या को छोड़ कर अन्य कोई उसका उत्पादक अवयव नहीं हो सकता है। जैसे, ८३ का निरग्रमूल ९ है, और ९ से छोटी किसी संख्या से ८३ यह निःशेष विभाजित नहीं होता, इसलिये ८३ यह रूढसंख्या है।

अपवर्तन के कुछनियम

(१) नियम—यदि कोई संख्या किसी दूसरी संख्या से निःशेष विभा-

जित हो, तो उसका कोई अपवर्त्य भी उस दूसरी संख्या से निःशेष होगा। जैसे ८ यह संख्या २ से निःशेष होती है, इसलिये ८ का अपवर्त्य ५६ यह भी २ से निःशेष होगा।

(२) **नियम**—यदि एक संख्या किसी दूसरी संख्या से निःशेष होती हो, और उसकी लब्धि किसी अन्य संख्या से निःशेष होती हो, तो यह दूसरी लब्धि और दूसरी संख्या इन दोनों के गुणनफल से वह पहिली संख्या निःशेष होगी। जैसे, ५६ यह संख्या ७ यह दूसरी संख्या से निःशेष होती है और इसकी लब्धि ८ यह ४ इस अन्य संख्या से निःशेष होती है, इसलिये दूसरी लब्धि २ और दूसरी सङ्ख्या ७ इनका गुणनफल १४ इससे ५६ यह पहिली सङ्ख्या निःशेष होती है।

(३) **नियम**—यदि दो संख्याएँ किसी तीसरी संख्या से निःशेषित हों, तो उनका योग और अन्तर भी उस तीसरी संख्या से निःशेषित होगा। जैसे, १५ और २५ यह दो संख्याएँ ५ से निःशेषित होती हैं, तव इनका योग ४० और अन्तर १० ये दोनों ५ से निःशेषित होते हैं।

उदाहरणमाला (१)

नीचे लिखी हुई संख्याएं २, ३, ४, ५, ८, ९, १० और ११ इनमें से कौन संख्याओं स निः शेष होंगी ?

(१) १३८ (२) ९४५ (३) ६८४ (४) ४२० (५) ८८४४ (६) ७९४२ (७) १२३० (८) १७७२ (९) २३११ (१०) ३४७५ (११) २३००० (१२) ७०९२८१ (१३) ७७७७७७ (१४) ९८९८९८ (१५) १२३४५६७८९०

नीचे लिखी संख्याएं ७, ११, १३, इनमें से किस किस संख्या से निःशेष होंगी ?

(१६) ५५५५५५५ (१७) ४३३३७८ (१८) ४१२३२१० (१९) ५५७३४५४५ (२०) १२३७८९६६६

नीचेलिखी संख्याएं किनसे निःशेष होंगी ?

(२१) १८६९३ (२२) २४६१२३ (२३) १३६१७ (२४) ९५१९ (२५) २७९३१ (२६) १५९५३

नीचे लिखी संख्याओं को उनके दृढापवर्तनों में विभक्त करो

(२७) ६३३३६ (२८) ८७९९५ (२९) १३२९९० (३०) १५३९० (३१) २७६२७६

(३२) २४ और ४२ इनके साधारण गुणनखण्ड कौन हैं ?

(३३) नीचे लिखी हुई संख्याओं में कौन रूढ और कौन यौगिक संख्याएं हैं ?

५९; १०१; १३७; १४८; १४९; १६३; १८१; १९६; १९७; २२३; २२७;

(३४) दो भिन्न अङ्कों से बनी हुई सबसे छोटी रूढ संख्या कौन है ?

(३५) तीन भिन्न अङ्कों से बनी हुई सबसे छोटी और सबसे बड़ी रूढ संख्या कौन है ?

(३६) सिद्ध करो कि ६८७ यह रूढ संख्या नहीं है।

(३७) सिद्ध करो कि ४८७ यह रूढ संख्या है।

(३८) १००० से छोटी सबसे बड़ी संख्या कौन है जो ११ से पूरी बट जाय।

(३९) क्या कोई सम संख्या रूढ संख्या हो सकती है ? यदि हो सकती हो, तो लिखो।

(४०) $५^{३}$, $६^{२}$, $७^{३}$, $११^{२}$, $१०^{५}$, इनका क्या अर्थ है ?

महत्तमसमापवर्तक

(८९) दो वा अधिक संख्याओं में से प्रत्येक को पूरी विभाजित करने वाली संख्याओं में सबसे बड़ी जो संख्या होगी, उसको उन दो वा अधिक संख्याओं का **महत्तमसमापवर्तक** कहते हैं।

जैसे, ४८, ७२, १२०, इन संख्याओं में से प्रत्येक को निःशेष विभाजित करने वाली २, ३, ४, ६, ८, १२, २४ यह संख्या हैं। इन में २४ यह सबसे बड़ी संख्या है, इस लिये २४ इस संख्या को ४८, ७२ और १२० इन संख्याओं का महत्तमसमापवर्तक कहते हैं। महत्तम माने सबसे बड़ा और समापवर्तक माने साधारण गुणनखण्ड, अर्थात् दी हुई संख्याओं के सबसे बड़े साधारण गुणनखण्ड को महत्तमसमापवर्तक कहते हैं।

(९०) जिन दो संख्याओं का १ को छोड़ अन्य कोई साधारण गुणनखण्ड नहीं होता है, वे परस्पर रूढ कही जाती हैं। जैसे, ४ और ९ ये दो संख्याएं यद्यपि स्वयं रूढ नहीं हैं, फिर भी इन दोनों का १ को छोड़ अन्य कोई साधारण अपवर्तक न होने से ये परस्पर रूढ कहलाती हैं।

(९१) जिन दो संख्याओं का कोई साधारण गुणनखण्ड होता है, वे परस्पर अदृढ़ कही जाती हैं। जैसे, २४ और ३० ये दो संख्याएं परस्पर अदृढ़ हैं।

(९२) कोई दो संख्याओं में उनके महत्तमापवर्तक से भाग दो तो लब्धि परस्पर दृढ होंगी।

गुणनखण्डों के द्वारा महत्तमापवर्तक निकालने का विधि

(९३) जिन संख्याओं का महत्तमापवर्तक निकालना हो उन सबके रूढ गुणनखण्ड अलग अलग निकालो। तब उन सब संख्याओं के साधारण गुणनखण्ड जितने होंगे उनको लिख कर उन सबका जो गुणनफल होगा, वही सब संख्याओं का महत्तमापवर्तक होगा। यदि सब संख्याओं का एक साधारण गुणनखण्ड होगा, तो वही उनका महत्तमापवर्तक होगा।

उदाहरण (१) ३६, ४५, ६०, इनका महत्तमापवर्तक निकालो।

यहां, ३६ = २ × २ × <u>३</u> × ३,
४५ = ५ × <u>३</u> × ३,
६० = ५ × २ × २ × <u>३</u>,

यहां सब संख्याओं का साधारण गुणनखण्ड ३ यही केवल है, इस लिये ३ यह उक्त संख्याओं का महत्तमापवर्तक है।

उदाहरण (२) २५२, ३९६, ९२४ इनका महत्तमापवर्तक क्या है?

अथवा, यहां २५२ इस एक ही संख्या के रूढ गुणनखण्ड निकाल कर उन गुणनखण्डों में से जिनका ३९६ और ९२४ इन दोनों संख्याओं में निःशेष भाग लगेगा, उन्ही गुणनखण्डों को लिख कर उनका गुणनफल अभीष्ट महत्तमापवर्तक होगा। जैसे, २५२ = <u>२</u> × <u>२</u> × <u>३</u> × ३ × ७, अब ३९६ और ९२४ इन दोनों संख्याओं में २ × २ = ४ और ३ इन गुणनखण्डों का निःशेष भाग लगता है, इस लिये उक्त तीनों संख्याओं का महत्तमापवर्तक ४ × ३ = १२ यह होता है। ऐसा करने से प्रत्येक संख्या के रूढ़ गुणनखण्ड निकालने की आवश्यकता नहीं होती है।

महत्तमापवर्तक निकालने का दूसरा प्रकार

(९४) जब दो संख्याओं का महत्तमापवर्तक निकालना हो, तो उन दो संख्याओं में जो छोटी संख्या होगी उसका बड़ी संख्या में भाग दो। जो शेष बचेगा उसका उसके भाजक में भाग दो। तब जो दूसरा शेष बचेगा उसका फिर उसके भाजक में भाग दो। इसी तरह उद्दिष्ट संख्याओं का परस्पर भाग देने से जिस शेष से उसका भाजक निःशेष होगा, वह उद्दिष्ट संख्याओं का महत्तमापवर्तक होगा। और परस्पर भाग देने से यदि अन्त में १ शेष बचेगा, तो वे दो संख्याएँ परस्पर दृढ होंगी।

उदाहरण (३) ६२४ और १४४३ इनका महत्तमापवर्तक निकालो।

```
६२४ ) १४४३ ( २
      १२४८
      १९५ ) ६२४ ( ३
             ५८५
             ३९ ) १९५ ( ५
                  १९५
                  ...
```

यहां उक्त प्रकार से गणित करने पर ३९ शेष से १९५ यह उसका भाजक निःशेष होता है, इस लिये उक्त दो संख्याओं का ३९ यह महत्तमापवर्तक है।

तीन वा अधिक संख्याओं का महत्तमापवर्तक निकालने का विधि

(९५) पहिले दो संख्याओं का उक्त प्रकार से महत्तमापवर्तक निकालो। फिर यह महत्तमापवर्तक और तीसरी संख्या इनका महत्तमापवर्तक निकालो। फिर आगे भी यही क्रिया करने से अन्त में जो महत्तमापवर्तक होगा वही सब संख्याओं का महत्तमापवर्तक होगा।

उदाहरण (४) १८, ३० और ३९ इनका महत्तमापवर्तक क्या है?

```
यहां, १८ ) ३० ( १
           १८
           १२ ) १८ ( १
                १२
                 ६ ) १२ ( २
                     १२
                     ..
```

∴ १८ और ३० का महत्तमापवर्तक ६ है, अब ६ और ३९ का महत्तमापवर्तक निकालना चाहिये।

```
६ ) ३९ ( ६
    ३६
    ---
     ३ ) ६ ( २
         ६
         -
         ०
```

∴ १८, ३० और ३९ इन संख्याओं का ३ यह महत्तमापवर्तक है।

उदाहरण (५) वह बड़ी से बड़ी संख्या बताओ, जिससे ५९ और १२२ को भाग दें, तो प्रत्येक दशा में ३ शेष रहे।

यहां वह सबसे बड़ी संख्या निकालनी है, जो ५९ − ३ = ५६ को और १२२ − ३ = ११९ को पूरी विभाजित कर सकेगी, अर्थात् ५६ और ११९ का महत्तमापवर्तक हमको निकालना है। और, ५६ = २ × २ × २ × ७ और ११९ = १७ × ७, अतः ५६ और ११९ का महत्तमापवर्तक ७ है।

उदाहरण (६) दो अङ्कों की सब से बड़ी और तीन अङ्कों की सबसे छोटी संख्याओं का महत्तमापवर्तक ३१ है, तो उन संख्याओं को बताओ।

यहां १०० में ३१ का भाग देने से ३ लब्धि और ७ शेष बचता है, अतः १०० − ७ = ९३ यह दो अङ्कों की सबसे बड़ी अभीष्ट संख्या है, और ९३ + ३१ = १२४ यह तीन अंकों की सब से छोटी अभीष्ट संख्या है।

उदाहरणमाला (२)

इनका महत्तमापवर्तक निकालो

(१) २४, ७२ (२) २१६, ४७४ (३) ८१६, १०४४ (४) ७६२७१८, ८१४१३१ (५) ३७५७५७२, ४१४३२२३ (६) ४०, ४८, ६० (७) १६५, २२१, ३८५ (८) ५४६, ७१४, १३२६ (९) ३१५, ४९५, ६९३, ११५५ (१०) ३८११, ४९०१, ७१६३

(११) दो संख्याओं का महत्तमापवर्तक निकालने में क्रम से लब्धियां ७, ६ और ९ होती हैं और अन्तिम भाजक १० है, तो उन संख्याओं को बताओ।

[उत्तर निकालने की क्रिया—यहां यह स्पष्ट है कि अन्तिमभाज्य=९ × १० =

९०, और द्वितीयभाजक = अन्तिमभाज्य, और द्वितीयलब्धि ६ है, अतः द्वितीय भाज्य = ६ × ९० + १० = ५५०, अब पहिला भाजक = द्वितीय भाज्य = ५५०, और पहिली लब्धि = ७, और पहिला शेष = द्वितीय भाजक = ९०, अतः पहिला भाज्य = ५५० × ७ + ९० = ३९४० अतः ५५० और ३९४० यह अभीष्ट दो संख्या हैं।]

(१२) दो संख्याओं का महत्तमापवर्तक निकालने में २, ३, ४, ५, यह क्रम से लब्धि होती हैं और अन्तिम भाजक ४ है, तो उन संख्याओं को बताओ।

(१३) वह सबसे बड़ी संख्या कौन है, जिसका १५७८ और १४६४६ में भाग दें तो प्रत्येक दशा में ५ शेष रहे।

(१४) एक मनुष्य ने एक स्कूल के लड़कों को २४६ आम समान रूप से बांट दिये, दूसरे दिन उन्ही लड़कों को उसने ६१५ केले बांट दिये, तब उस स्कूल में कितने लड़के थे ?

(१५) ५९५ सेर तेल और ५६१ सेर घी समान आकार के पात्रों में भर कर किसी दूसरे ग्राम में भेजना है, तो कम से कम कितने पात्रों की जरूरत होगी ?

(१६) ५०० इस संख्या के समीप की दो ऐसी संख्या बताओ जिनका महत्तमापवर्तक १९ है।

(१७) एक खेत ३२३ हाथ लंबा और २२१ हाथ चौड़ा है, उसकी लंबाई और चौड़ाई पूरी पूरी नापने के लिये एक बहुत बड़ी जंजीर बनवाना है, तो उस जंजीर की लंबाई कितने हाथ होनी चाहिये ?

(१८) एक २ मन ३७ सेर की गेहूं की ढेरी है और दूसरी में १४ मन ३८ सेर चना है, तो उनको पूरा पूरा नापने के लिये बड़ी से बड़ी कितने सेर की टोकरी हो सकतीहै ?

(१९) एक मजदूर कुछ दिन के लिये १३ रु० २ आ० में एक काम करने को रखा गया, वह कुछ दिन तक गैर हाजिर रहा, जिससे उसको सिर्फ ४ रु० ४ आ० ३ पा० मिले, तब यह सिद्ध करो कि उसकी प्रति दिन की मजदूरी ५ आ० ३ पा० से अधिक नहीं हो सकती है।

(२०) एक मनुष्य ने कुछ आम १ रु० ११ आ० ४ पा० में मोल लिये,

और उनमें से कुछ १ रु० ४ आ० ८ पा० में बेच दिये, तब उसके पास बचे हुए आमों की कम से कम क्या संख्या हो सकती है ?

लघुतमसमापवर्त्य

(९६) दो वा अधिक संख्याओं में से प्रत्येक संख्या जितनी संख्याओं को पूरी विभाजित करती है उतनी संख्याएँ उन दो वा अधिक संख्याओं के साधारण अपवर्त्य कहे जाते हैं। और उन अपवर्त्यों में सबसे छोटा जो अपवर्त्य होगा वही लघुतम अर्थात् सबसे छोटा समापवर्त्य कहा जाता है। जैसे, २, ३, ४, इन संख्याओं के १२, २४, ३६, इत्यादि साधारण अपवर्त्य हैं, इनमें १२ यह सबसे छोटा अपवर्त्य होने से २, ३, ४, इन संख्याओं का १२ यह लघुतमसमापवर्त्य है।

(९७) कोई दो संख्याओं का उनके लघुतमापवर्त्य में भाग दो तो लब्धि परस्पर दृढ़ होंगी।

(९८) जो दो संख्याएं परस्पर दृढ होती हैं उनका गुणनफल ही उन संख्याओं का लघुतमापवर्त्य होता है। जैसे, ७ और ४ इन परस्पर दृढ संख्याओं का लघुतमापवर्त्य ७ × ४ = २८ होता है।

और जो अनेक संख्याएँ ऐसी हों जिनमें की कोई दो संख्याएँ परस्पर अदृढ़ न हों तो उनका भी गुणनफल उन संख्याओं का लघुतमापवर्त्य होता है। जैसे, ४, ७, ११, १५, इन चार संख्याओं में कोई दो संख्याएँ परस्पर अदृढ नहीं हैं, इस लिये ४ × ७ × ११ × १५ = ४६२० यही उक्त संख्याओं का लघुतमापवर्त्य है।

लघुतमापवर्त्य निकालने का पहिला प्रकार

(९९) दो संख्याओं के गुणनफल में उन दो संख्याओं के महत्तमापवर्तक का भाग दो तो लब्धि उन दो संख्याओं का लघुतमापवर्त्य होगी। जैसे, ९ और १२ का लघुतमापवर्त्य निकालना है तो ९ और १२ का महत्तमापवर्तक ३ है, अतः १२ × ९ ÷ ३ = १०८ ÷ ३ = ३६ यह ९ और १२ का लघुतमापवर्त्य है।

(१००) यदि दो से अधिक संख्याओं का लघुतमापवर्त्य जानना हो तो पहिले उक्त प्रकार से दो संख्याओं का लघुतमापवर्त्य निकालो। फिर इस लघुतमापवर्त्य और तीसरी संख्या का लघुतमापवर्त्य निकालो। इसी प्रकार अन्त तक

करने पर अन्त में जो लघुतमापवर्त्य होगा वही अभीष्ट लघुतमापवर्त्य होगा। जैसे, ६, २०, २५, इनका लघुतमापवर्त्य निकालना है तब, पहिले ६ और २० का महत्तमापवर्तक २ है, अतः ६ × २० ÷ २ = ६०. यह ६ और २० का लघुतमापवर्त्य हुआ, अब ६० और २५ का महत्तमापवर्तक ५ है, अतः २५ × ६० ÷ ५ = १५०० ÷ ५ = ३०० यह उक्त संख्याओं का लघुतमापवर्त्य है।

नोट—इससे यह नियम बनता है कि दो संख्याओं का गुणनफल उनके महत्तमापवर्तक और लघुतमापवर्त्य के गुणनफल के समान होता है। और उन दो संख्याओं के गुणनफल में उनके लघुतमापवर्त्यका भाग दें तो लब्धि उन दो संख्याओं का महत्तमापवर्तक होगी।

लघुतमापवर्त्य निकालने का दूसरा प्रकार

(१०१) दी हुई संख्याओं में से प्रत्येक के रूढ गुणनखण्ड निकालो। तब उनमें एक ही बार आने वाले जितने गुणनखण्ड होंगे उनको लिखो। और यदि कई बार आने वाले गुणनखण्ड हों तो अधिक से अधिक जितनी बार वे किसी संख्या में आयें हों उतनी बार उनको लिखो। फिर इन सबका गुणनफल अभीष्ट लघुतमापवर्त्य होगा।

उदाहरण (१) ४०, ६०, ८०, इनका गुणनखण्डों द्वारा लघुतमापवर्त्य निकालो।

४० = २ × २ × २ × ५,	यहां एक ही बार आये हुए गुणनखण्ड
६० = २ × २ × ३ × ५,	३ और ५ हैं, और २ अधिक से अधिक
८० = २ × २ × २ × २ × ५,	४ बार तीसरी संख्या में आये हैं, अतः

२ × २ × २ × २ × ३ × ५ = २४० यही उक्त संख्याओं का लघुतमापवर्त्य है।

लघुतमापवर्त्य निकालने का तीसरा प्रकार

(१०२) उद्दिष्ट संख्याओं को एक आडे पङ्क्ति में क्रम से लिखो। फिर देखो कि २, ३, ५, ७, इत्यादि रूढ संख्याओं में से किस रूढसंख्या से पङ्क्ति की दो वा अधिक संख्या निःशेष होती हैं, उस रूढ संख्या को पङ्क्ति की बांई ओर भाजक के स्थान में लिखो। और उससे पङ्क्ति की जो जो संख्या निःशेष होगी उसमें भाग दे कर लब्धि को उस उस संख्या के नीचे लिखो। और जो संख्या उस रूढ संख्या

से निःशेष न होगी उसको भी उस संख्या के नीचे रखो। इस तरह पहिली पङ्क्ति के नीचे एक दूसरी पङ्क्ति बनेगी। उसमें भी फिर इसी प्रकार की क्रिया करो। ऐसा बार बार तब तक करो जब तक अन्त की पङ्क्ति में ऐसी सब संख्याएं हो जांय जिनमें कोई दो संख्या परस्पर अदृढ न रहें। तब वे भाजकरूप दृढसंख्याएँ और अन्त की पङ्क्ति की सब संख्याएँ इन सबका जो गुणनफल होगा वही उन उद्दिष्ट सङ्ख्याओं का लघुतमापवर्त्य होगा। छोटी छोटी अनेक संख्याओं का लघुतमापवर्त्य इसी प्रकार से निकालने में लाघव होता है।

उदाहरण (२) १२, १५, १६, १८, इनका लघुतमापवर्त्य निकालो।

२) १२, १५, १६, १८।
२) ६, १५, ८, ९।
३) ३, १५, ४, ९।
१, ५, ४, ३।

इसलिये २ × २ × ३ × ५ × ४ × ३ = ७२० यह उद्दिष्ट संख्याओं का लघुतमापवर्त्य है।

उदाहरण (३) २ से लेकर १० तक की क्रमिक संख्याओं का लघुतमापवर्त्य क्या है?

यहां २) २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, १०।
२) १, ३, २, ५, ३, ७, ४, ९, ५।
३) १, ३, १, ५, ३, ७, २, ९, ५।
५) १, १, १, ५, १, ७, २, ३, ५।
१, १, १, १, १, ७, २, ३, १।

∴ २ × २ × ३ × ५ × ७ × २ × ३ = २५२० यह उक्त संख्याओं का लघुतमापवर्त्य है।

अथवा उक्त संख्याओं में जो जो संख्या किसी अन्य संख्या का अपवर्तक होगी उस उस संख्या को निकाल दो। और शेष संख्याओं का उक्त प्रकार से लघुतमापवर्त्य निकालो वही उक्त सब संख्याओं का लघुतमापवर्त्य होगा। इससे क्रिया में बहुत लाघव होगा। जैसे, ऊपर के उदाहरण में २, ३, ४, ५ यह चार संख्याएँ ६, ८ और १० के अपवर्तक हैं, इसलिये २, ३, ४, ५ इन संख्याओं को

हटा कर शेष ६, ७, ८, ९, १० इन संख्याओं का लघुतमापवर्त्य भी अभीष्ट लघुतमापवर्त्य होता है। जैसे,

२) ६, ७, ८, ९, १०।
   ३, ७, ४, ९, ५।

∴ २×७×४×९×५=२५२० यह अभीष्ट लघुतमापवर्त्य है।

यहां ९ के अपवर्तक ३ को हटा दिया है।

नोट—यहां प्रत्येक पङ्क्ति को रूढसंख्या से ही भागना चाहिये। यौगिकसंख्या से भाग देने पर कभी कभी अशुद्ध उत्तर आता है। जैसे नीचे के उदाहरण में १० इस यौगिकसंख्या का भाग देने से उत्तर अशुद्ध आता है।

उदाहरण (४) २०, २५, ५० इनका लघुतमापवर्त्य क्या है?

शुद्ध क्रिया	अशुद्ध क्रिया
२) २०, २५, ५०।	१०) २०, २५, ५०।
५) १०, २५, २५।	५) २, २५, ५।
५) २, ५, ५।	२, ५, १।
२, १, १।	∴ अशुद्ध उत्तर=१०×५×२×५=५००,

∴ शुद्ध उत्तर=२×५×५×२=१००,

उदाहरण (५) एक फल वेचनेवाले के टोकरी में कुछ फल थे। जब वह उनमें से चार चार, पांच पांच, छ छ, सात सात वा आठ आठ फल गिनता था तब एक ही फल शेष रहता था। तब कहो उसकी टोकरी में कितने फल थे?

यहां ४, ५, ६ ७ और ८ इनका लघुतमापवर्त्य ८४० है, अतः ८४०+१=८४१ इसमें ४, ५, ६, ७, ८ इन संख्याओं का अलग अलग भाग देने से १ ही शेष बचेगा, इसलिये उस टोकरी में ८४१ फल थे।

उदाहरण (६) वह छोटी से छोटी कौन संख्या है, जिसको २, ३, ४ व ५ से विभाजित करने से शेष क्रम से १, २, ३ व ४ आते हैं।

यहां प्रत्येक शेष अपने भाजक से १ कम है, अर्थात् उस संख्या में १ जोड़ा जाय तो वह संख्या अपने भाजकों से पूरी विभाजित होगी, अतः वह संख्या २, ३, ४ व ५ के लघुतमापवर्त्य से १ कम है, अर्थात् अभीष्ट संख्या =६०-१=५९

उदाहरण (७) १२, १६ और १८ इनमें प्रत्येक से पूरी विभाजित होने वाली तीन अङ्कों की सबसे बड़ी संख्या कौन है ?

१२, १६ और १८ इनमें प्रत्येक से पूरी विभाजित होने वाली सबसे छोटी संख्या १२, १६ और १८ इनका लघुतमापवर्त्य होना चाहिये, और उक्त संख्याओं का लघुतमापवर्त्य १४४ है, जिसको किसी संख्या से गुण देने पर भी गुणनफल १२, १६ और १८ इनमें से प्रत्येक से पूरा विभाजित होगा, अब तीन अङ्कों की सबसे बड़ी संख्या ९९९ यह है, और इसके समीप की संख्या १४४ × ६ = ८६४ यह है, अतः ८६४ यह उत्तर है ।

उदाहरणमाला (३)

नीचे लिखी हुई संख्याओं का लघुतमापवर्त्य निकालो

(१) ३६, ९९ (२) ७८९१, १३९६१ (३) २०, २४, ३० (४) ९०, १३५, १५० (५) १२०, १४४, १८०, २४०, ३६० (६) ६, १४, २१, २२, ३३, ७७ (७) १२५, १७५, २२५, २५, ३४, ५१, १५ (८) २५०, ३६०, ४९, ७०० (९) २१, २२, २३, २४, २५, २६, २७, २८, २९, ३० (१०) १८०१८, ३७०३७, ५१२८२, ६०६०६, ९५२३८

(११) जिन दो संख्याओं का गुणनफल १७६४ और महत्तमापवर्तक ७ है, उनका लघुतमापवर्त्य क्या है ?

(१२) जिन दो संख्याओं का महत्तमापवर्तक २१ और लघुतमापवर्त्य ४२० है, और उन दो संख्याओं में एक संख्या ८४ है, तो दूसरी संख्या को बताओ ?

(१३) १३, १५, १७ और १९ इन चार संख्याओं से जितनी संख्याएं निःशेष होंगी उनमें सब से छोटी संख्या क्या है ?

(१४) वह संख्या कौन है ? जिसमें ५, ६, ७, ८ और ९ इन संख्याओं का अलग अलग भाग देने से प्रत्येक दशा में ३ शेष रहता है ।

(१५) वह कौन संख्या है ? जिसमें ६, ५, ४ और ३ इनका अलग अलग भाग देने पर क्रम से ४, ३, २ और १ शेष रहता है ।

(१६) ५, ७ और ३६ इनमें प्रत्येक से पूरी बट जाने वाली चार अङ्कों की सबसे छोटी संख्या कौन है ?

(१७) १००० और १५०० इन दो संख्याओं के बीच में ४, ५, ९, १२ और १५ इनके साधारण अपवर्त्य कौन हो सकते हैं ?

(१८) वह सबसे छोटी संख्या कौन है ? जिसमें ४ घटाने से जो शेष बचता है वह ४८, ६४ और ७२ इनमें से प्रत्येक से पूरा विभाजित होता है।

(१९) वह सबसे छोटी संख्या कौन है ? जिसमें ३५ का भाग देने से २५ शेष बचता है, ४५ का भाग देने से ३५ शेष और ५५ का भाग देने से ४५ शेष बचता है।

(२०) पांच मनुष्यों को एक मंदिर की प्रदक्षिणा करने में क्रम से ४, ३, ६, ९ और ८ मिनट लगते हैं, उन सबने एक ही समय एक ही स्थान से प्रदक्षिणा करना शुरू किया, तब बताओ उसी स्थान पर कितने समय के बाद वे सब पहिली बार मिलेंगे ?

(२१) पांच घंटे क्रम से ३, ५, ६, ८ और ११ सेकण्ड के अन्तर से बजते हैं, एक बार एक साथ बजने पर तीसरी बार वे सब एक साथ कितने समय में बजेंगे ?

(२२) एक सायकल के दोनों पहियों के घेरे क्रम से ७ फी० २ इञ्च और १० फी० ९ इ० हैं, तब उन पहियों में से प्रत्येक के क्रम से कम और पूरे पूरे चक्कर होने तक वह सायकल कितने दूर जायगी ?

(२३) ७६४८, १३३८४ और ६३०९६ इनका गुणनखण्ड द्वारा महत्तमापवर्तक और लघुतमापवर्त्य निकालो।

(२४) एक घंटी २ मिनट में ६ बार बजती है, दूसरी ५ मिनट में ९ बार, तीसरी ३ मिनट में १५ बार और चौथी ४ मिनट में २१ बार बजती है, वे सब एक बार एक साथ बजने पर फिर एक साथ कब बजेंगी ?

(२५) दो संख्याओं का लघुतमापवर्त्य उनके महत्तमापवर्तक से २८ गुना है, और महत्तमापवर्तक और लघुतमापवर्त्य इनका योग १७४० है, और उन दो संख्याओं में एक संख्या २४० है, तो दूसरी संख्या क्या है ?

भिन्नसंख्याव्युत्पादन

(१०३) यहां तक **अभिन्नसंख्या** का अर्थात् पूरी इकाई से बनी हुई अथवा इकाइओं के समूह से बनी हुई संख्या का गणित दिखलाया जा चुका है। अब भिन्न संख्या का निरूपण किया जाता है ।

किसी पदार्थ के वा इकाई के समान भाग करके उनमें से एक वा अधिक भागों को सूचित करने वाली संख्या को **भिन्नसंख्या** कहते हैं। इससे यह स्पष्ट मालूम पड़ता है कि कोई भिन्नसंख्या दो संख्याओं द्वारा प्रकट की जाती है। जिनमें पदार्थ के समान भागों को सूचित करने वाली एक संख्या और दूसरी उन समान भागों में से एक वा अधिक भागों को सूचित करने वाली संख्या होती है ।

(१०४) किसी भिन्न संख्या को लिखने में किसी पदार्थ के वा इकाई के समान भागों में से एक वा अधिक भागों को सूचित करने वाली संख्या को पहिले लिख कर उसके नीचे एक आडी रेखा करते हैं और उस रेखा के नीचे पदार्थ वा इकाई के समान भागों को सूचित करने वाली संख्या लिखते हैं। यहां रेखा के ऊपर की संख्या को **अंश** और नीचे की संख्या को **छेद** वा **हर** कहते हैं ।

जैसे, किसी पदार्थ वा इकाई के ५ समान भाग कर के उनमें से ३ भागों को दिखलाना अभीष्ट हो तो $\frac{३}{५}$ इस तरह ३ को रेखा के ऊपर लिख कर उसके नीचे ५ को लिखते हैं। और यहां ऊपर के ३ को अंश और नीचे के ५ को छेद कहते हैं ।

(१०५) किसी भिन्न संख्या को पढने में पहिले अंश स्थान की संख्या का उच्चारण करके तब तुरन्त छेद की संख्या के आगे अंश शब्द लगा कर उसका उच्चारण किया जाता है । जैसे, $\frac{३}{५}$ को तीन पञ्चमांश, $\frac{७}{१०}$ को सात दशांश, $\frac{९}{१६}$ को नौ षोडशांश, इस तरह पढते हैं। अथवा इन भिन्न संख्याओं को क्रम से तीन बटे पांच, सात बटे दस, नौ बटे सोलह, इस तरह भी पढ़ते हैं ।

(१०६) भिन्न संख्या के छेद की जो संख्या होती है उतने किसी पदार्थ वा इकाई के समान भाग करके उनमें से अंश की संख्या के इतने भागों का मान वही होता है जो छेद की संख्या के इतने अंश की संख्या के समान भाग कर के उनमें से एक भाग का मान होता है। जैसे, $\frac{३}{८}$ रुपया अर्थात् यहां रुपया इस परिमाण के ८ समान भाग करने से १ भाग का मान १ दोअन्नी होता है, ऐसे तीन भागों का मान ३ दोअन्नियां = ६ आने, यह $\frac{३}{८}$ रुपये का मान है। अब ३ रुपये के ८ समान भाग करो, यहां ३ में ८ का भाग नहीं लगता इस लिये ३ रु० के आने बनाये, तब ३ रु० × १६ = ४८ आ० इसमें ८ का भाग देने से लब्धि ६ आ० यह एक भाग का मान पूर्वोक्त मान के तुल्य ही होता है। इससे यह स्पष्ट प्रतीत होता है कि, किसी भिन्न संख्या का अंश भाज्य और छेद भाजक होता है और जो लब्धि होती है वही भिन्नसंख्या है। यहां भाजक से भाज्य निःशेष नहीं होता है इस लिये वह अपूर्ण लब्धि होने से भिन्न संख्या को अपूर्ण संख्या भी कहते हैं।

(१०७) जब कि भिन्न संख्या भाज्य भाजकों द्वारा प्रकट की जाती है तब हम किसी अभिन्न संख्या को भी भाज्य भाजकों द्वारा भिन्न संख्या में प्रकट कर सकते हैं। जैसे, $१४ = \frac{१४}{१} = \frac{२८}{२} = \frac{४२}{३}$ इत्यादि। यहां १४, २८, ४२ में क्रम से १, २, ३ का भाग देने से १४ यही लब्धि आती है।

(१०८) जब भिन्न संख्या का अंश छेद से छोटा होता है तब उसका मान १ से कम होता है, जब छेद के बराबर अंश होता है तब उसका मान १ के समान होता है और जब छेद से अंश बड़ा होता है तब उसका मान १ से बड़ा होता है।

(१०९) भिन्न संख्या के अंश और छेद को किसी एक ही संख्या से गुण दो वा भाग दो तो भी उसका मान नहीं बदलता। जैसे, $\frac{५}{८}$ रु० $= \frac{५ \times २}{८ \times २} = \frac{१०}{१६}$ रु०, क्यों कि १ रुपये के आठ भागों में से ५ भागों का मान ५ दोअन्नियां=

१० आने होते हैं, यही मान १ रुपये के १६ भाग कर के उनमें से १० भागों का होता है। इसी तरह $\frac{३२}{६४}$ रु० $= \frac{३२ \div १६}{६४ \div १६} = \frac{२}{४}$ रु०, यहां १ रुपये के ६४ भाग कर के उनमें से ३२ भाग का मान ३२ पैसे = ८ आने होते हैं, और १ रुपये के ४ भागों में से २ भागों का मान भी २ चौअन्नियां = ८ आने होते हैं।

(११०) भिन्न संख्या को किसी अभिन्न संख्या से गुण देना हो तो उस भिन्न संख्या के अंश को उस अभिन्न संख्या से गुण देने से जो गुणनफल होगा वही अभीष्ट गुणनफल होता है। और यदि उस भिन्न संख्या का छेद उस अभिन्न संख्या से निःशेष होता हो तो उस अभिन्न संख्या का छेद में भाग दो तो भी अभीष्ट गुणनफल होता है। जैसे, $\frac{५}{७} \times ३ = \frac{५ \times ३}{७} = \frac{१५}{७}$ = अभीष्ट गुणनफल, और $\frac{५}{२१} \times ३ = \frac{५}{२१ \div ३} = \frac{५}{७}$ यही अभीष्ट गुणनफल होता है।

(१११) भिन्न संख्या में किसी अभिन्न संख्या का भाग देना हो तो लब्धि के लिये उस भिन्न संख्या के छेद को उस अभिन्न संख्या से गुण दो। और यदि उस भिन्न संख्या का अंश उस अभिन्न संख्या से निःशेष होता हो तो लब्धि के लिये उस अंश में उस अभिन्न संख्या का भाग दो तो अभीष्ट लब्धि होगी। जैसे, $\frac{५}{७} \div ३ = \frac{५}{७ \times ३} = \frac{५}{२१}$ = अभीष्ट लब्धि, और $\frac{१५}{७} \div ३ = \frac{१५ \div ३}{७} = \frac{५}{७}$ यही अभीष्ट लब्धि है।

उदाहरण (१) एक रुपये के $\frac{३}{४}$ का क्या मान है ?

यहां एक रुपये के ४ भागों में से ३ भाग लिये गये हैं, १ रुपये के ४ भागों में से १ भाग का मान १ चौअन्नी होता है, इस लिये ३ भाग = ३ चौअन्नी = १२ आने के होंगे। अतः एक रुपये का $\frac{३}{४}$ = १२ आने। यहां १२ आने १ रुपये की कौन भिन्न है ?

ऐसे प्रश्न का उत्तर $\frac{३}{४}$ भिन्न, यह होता है।

उदाहरण (२) १४ के $\frac{६}{७}$ का क्या अर्थ है ?

यहां १४ के ७ भाग करके ६ भाग लिये गये हैं। और हर एक भाग= १४÷७=२ है, अतः ६ भाग=१२, इस लिये १४ के $\frac{६}{७}$=१२, यहां १२ को १४ की $\frac{६}{७}$ भिन्न कहते हैं।

उदाहरण (३) १ घण्टा ६ मि० के $\frac{३}{११}$ का क्या मान है ?

यहां १ घण्टा ६ मि० के मिनट बनाये तो ६६ मिनट हुए, अब ६६ मि० के ११ समान भाग करने से १ भाग ६ मिनट के तुल्य होता है, ऐसे ३ भाग=६×३ मिनट=१८ मिनट, अतः १८ मिनट, १ घण्टा ६ मिनट का $\frac{३}{११}$ वा भाग है।

उदाहरण (४) ७ सेर को १ मन के भिन्न में परिवर्तित करो।

यहां १ सेर १ मन का चालीसवा भाग है, ऐसे ७ भागों को १ मन के भिन्न में प्रकट करना है, इस लिये ७ सेर=$\frac{१}{४०}\times ७=\frac{१\times ७}{४०}=\frac{७}{४०}$ उत्तर

उदाहरणमाला (४)

अङ्कों में लिखो

(१) तीन चतुर्थांश, सात दशांश, तेरह बटे साठ, उन्नीस बटे एक सौ तिरपन, दो सौ चालीस बटे तीन सौ इक्यावन।

शब्दों में लिखो

(२) $\frac{६}{११}, \frac{१८}{३१}, \frac{१११}{२३५}, \frac{३८९}{९७७}, \frac{१२३५}{९८७६}$

(३) ११, १२, १३, १४, १५, इन अभिन्न संख्याओं को भिन्नसंख्याओं में प्रकट करो।

(४) ३० सेर १ मन की कौन सी भिन्न है ?

इनका मान क्या है ?

(५) ६ रु० का $\frac{७}{८}$ (६) ३ मन का $\frac{५}{६}$ (७) २ तोला ३ माशा का $\frac{४}{९}$ (८) ३ गज १ फूट का $\frac{९}{१०}$ (९) १ मील का $\frac{५}{८}$ (१०) ३५ का $\frac{५}{७}$

भिन्न में परिवर्तित करो

(११) ९ घण्टे को १ दिन के (१२) ११ सेर को १ मन के (१३) १९ को ३७ के

(१४) वह कौन सा धन है जिसका सातवा भाग ११ आ० है ?

(१५) $\frac{३}{८}$ रु० प्रति पुस्तक के हिसाब से १६ पुस्तक का दाम बताओ ।

(१६ $\frac{३}{२३}$ को ८ से और $\frac{११}{६०}$ को ३, ४, ६, १२, १५ और २० से अलग अलग गुण कर गुणनफलों को कहो ।

(१७) $\frac{५}{१७}$ में ७ का और $\frac{६०}{८३}$ में २, ३, ४, ५ और ६ का अलग अलग भाग देकर लब्धियों को कहो ।

(११२) अब भिन्नसंख्या के स्वरूप भेद से उसकी जो विशेष संज्ञाएँ होती हैं उनको कहते हैं ।

(१) जिस भिन्नसंख्या का अंश छेद से छोटा होता है उसको **समभिन्न संख्या** कहते हैं । जैसे, $\frac{१}{२}$, $\frac{२}{३}$, $\frac{५}{७}$ इत्यादि ।

(२) जिस भिन्नसंख्या का अंश छेद से बड़ा होता है उसको **विषम-भिन्नसंख्या** कहते हैं । जैसे, $\frac{७}{४}$, $\frac{१४}{९}$ इत्यादि ।

(३) जिस भिन्नसंख्या में अभिन्नसंख्या और भिन्नसंख्या दोनों सम्मिलित रहती हैं उसको **संयुक्तभिन्न** कहते हैं । जैसे, $३+\frac{३}{४}$, $१०+\frac{१}{२}$ इत्यादि ।

और इसको तीन पूर्णांक तीन चतुर्थांश, दस पूर्णांक एक द्वितीयांश, इस तरह, अथवा तीन सही तीन बटे चार, दस सही एक बटे दो इस तरह भी पढते हैं। और यहां बीच में + इस धन चिन्ह को न लिख कर केवल $३\frac{३}{४}$, $१०\frac{१}{२}$ ऐसा लिखते हैं।

(४) जिस भिन्नसंख्या के अंश और छेद दोनों की अभिन्न संख्या होती है उसको **भागजातिभिन्न** कहते हैं। जैसे, $\frac{२}{५}$, $\frac{१४}{११}$ इत्यादि।

(५) जिस भिन्नसंख्या के अंश और छेद दोनों की या दो में से कोई एक की भिन्नसंख्या होती है उसको **मिश्रभिन्न** कहते हैं। जैसे,

$$\frac{\frac{१}{२}}{\frac{३}{४}},\ \frac{\frac{१}{२}}{३},\ \frac{\frac{३}{७}}{८},\ \frac{२\frac{१}{३}}{४},\ \frac{५}{३\frac{१}{८}}\ \frac{३\frac{१}{४}}{५\frac{१}{७}}$$ इत्यादि।

(६) जिस भिन्नसंख्या में भाग के भाग होते हैं उसको **प्रभागजातिभिन्न** कहते हैं। जैसे, $\frac{३}{४}$ का $\frac{५}{७}$, $\frac{२}{३}$ का $\frac{३}{५}$ का $\frac{७}{१०}$ इत्यादि।

(७) किसी भिन्नसंख्या के अंश के स्थान में छेद को और छेद के स्थान में अंश को लिखने से जो दूसरी भिन्नसंख्या होगी उसको उस मूल भिन्नसंख्या की **व्युत्क्रमभिन्न** कहते हैं। जैसे, $\frac{२}{५}$ का $\frac{५}{२}$ यह व्युत्क्रमभिन्न होती है।

भिन्नसंख्या का रूपान्तर

(११३) भिन्नसंख्या को, उसके मान में कुछ परिवर्तन हुए विना, दूसरी भिन्नसंख्या के रूप में परिवर्तित करने के प्रकार नीचे दिये जाते हैं:—

१ ला प्रकार—किसी अभिन्नसंख्या को, उसके मान में कुछ परिवर्तन हुए बिना, ऐसी भिन्नसंख्या में परिवर्तित कर सकते हैं जिसका छेद इष्ट संख्या के समान होता है।

नियम १—अभिन्न संख्या को उस इष्ट संख्या से गुण दो जिसका छेद के स्थान में होना अभीष्ट हो, और गुणनफल को अंशस्थान में रखो और उस इष्ट संख्या को छेद के स्थान में रखो ।

उदाहरण (१) १२ इस अभिन्नसंख्या को ऐसी भिन्न का रूप दो जिसका छेद १३ होगा ।

यहां $१२ = \frac{१२}{१}$ और $\frac{१२}{१} = \frac{१२ \times १३}{१ \times १३} = \frac{१५६}{१३}$, $\therefore \frac{१५६}{१३}$ यह १२ इस अभिन्नसंख्या को दिया हुआ अभीष्ट भिन्न का रूप है ।

दी हुई भिन्नसंख्या को ऐसी भिन्न के रूप में ला सकते हैं जिसका छेद दी हुई भिन्नसंख्या के छेद का कोई अपवर्त्य होता है ।

नियम २—दी हुई भिन्नसंख्या के छेद का उस अभीष्ट अपवर्त्य में भाग दो जो लब्धि होगी उससे दी हुई भिन्नसंख्या के अंश और छेद दोनों को गुण दो ।

उदाहरण (२) $\frac{७}{१२}$ इसको ऐसी भिन्न में परिवर्तित करो जिसका हर ९६ होगा ।

यहां ९६ यह १२ का अपवर्त्य है अतः $९६ \div १२ = ८$ इससे $\frac{७}{१२}$ इसके अंश और छेद दोनों को गुण देने से $\frac{७ \times ८}{१२ \times ८} = \frac{५६}{९६}$ यह अभीष्ट भिन्न होती है ।

दी हुई भिन्नसंख्या को ऐसी भिन्न में बदल सकते हैं जिसका छेद दी हुई भिन्नसंख्या के छेद का कोई गुणनखण्ड होता है । परन्तु यह तभी हो सकता है जब उस गुणनखण्ड का दी हुई भिन्नसंख्या के छेद में भाग देने से जो लब्धि होगी उससे उस भिन्नसंख्या का अंश भी पूरा विभाजित हो सकता है ।

नियम ३—दी हुई भिन्नसंख्या के छेद में उस अभीष्ट गुणनखण्ड का भाग दो जो लब्धि होगी उससे उस भिन्नसंख्या के अंश और छेद दोनों में भाग दो ।

उदाहरण (३) $\frac{६५}{११७}$ इसको ऐसी भिन्न में रूपान्तरित करो जिसका छेद ९ होगा ।

यहां ९ का ११७ में भाग देने से लब्धि १३ इसका ६५ इस अंश में निःशेष भाग लगता है अतः अंश और छेद दोनों में १३ का भाग देने से $\frac{६५}{११७} = \frac{६५ \div १३}{११७ \div १३} = \frac{५}{९}$ यही अभीष्ट भिन्न है ।

उदाहरणमाला (५)

(१) ५, ६, ११ और १७ इनमें से प्रत्येक को ऐसी भिन्न में लाओ जिसका छेद ३१ है।

(२) १३ को ऐसी भिन्नों का रूप दो जिनके छेद ५, ८, १४ और १९ हों।

(३) $\frac{१}{२}$, $\frac{३}{४}$ और $\frac{५}{६}$ इनमें से प्रत्येक का १२, ६०, ७२ और ३०० छेद वाली भिन्नों में रूपान्तर करो।

(४) $\frac{३९}{९१}$, $\frac{६३}{९०}$, $\frac{८}{६४}$ और $\frac{१५}{५४}$ इनको ऐसी भिन्नों में बदल दो जिनके छेद क्रम से ७, १०, १६ और १८ हों।

(५) $\frac{३०}{४८}$, $\frac{२१}{५६}$, $\frac{३३}{८८}$ और $\frac{७२}{१४४}$ इनमें से प्रत्येक को ८ छेद वाली भिन्नों में परिवर्तित करो।

(२) प्रकार—दिये हुए संयुक्तभिन्न को विषमभिन्न में परिवर्तित कर सकते हैं।

नियम—दिये हुए संयुक्तभिन्न की अभिन्न संख्या को भिन्न संख्या के छेद से गुण दो और गुणनफल में उस भिन्नसंख्या का अंश जोड़ दो। और योगफल को अंश के स्थान में लिखो और उस भिन्न के छेद को ही छेद के स्थान में लिखो।

उदाहरण, ५$\frac{२}{३}$ इस संयुक्तभिन्न को विषमभिन्न का रूप दो।

$$\text{यहां } ५\frac{२}{३} = \frac{५ \times ३ + २}{३} = \frac{१५ + २}{३} = \frac{१७}{३},$$

उदाहरणमाला (६)

नीचे दी हुई संयुक्त भिन्नों को विषम भिन्नों में परिवर्तित करो

(१) ३$\frac{१}{४}$ (२) ·६$\frac{१}{३}$ (३) ७$\frac{२}{३}$ (४) ६$\frac{५}{८}$ (५) ९$\frac{६}{७}$ (६) १६$\frac{१७}{१८}$ (७) २०$\frac{२१}{२३}$

(८) १२$\frac{३}{८}$ (९) १९$\frac{२}{३}$ (१०) २६$\frac{३}{४}$ (११) ५५$\frac{१७}{५६}$ (१२) २४$\frac{३३}{११२}$

(१३) ११८$\frac{११५}{३९५}$ (१४) ३९८$\frac{४}{१९५}$ (१५) ४९८$\frac{३९९}{८९५}$

(३) प्रकार—विषमभिन्न को संयुक्तभिन्न में परिवर्तित कर सकते हैं।

नियम—दी हुई विषमभिदन के अंश में छेद का भाग दो। लब्धि को

संयुक्तभिन्न की अभिन्नसंख्या के स्थान में लिखो और उसके आगे शेष को अंश के स्थान में लिख कर छेद के स्थान में दी हुई विषमभिन्न के छेद को लिखने से विषमभिन्न का संयुक्तभिन्न में परिवर्तन होता है। यहां भाग देने पर शेष कुछ न बचेगा तो उस विषमभिन्न का संयुक्तभिन्न में परिवतन न हो सकेगा, किन्तु अभिन्नसंख्या में ही उसका परिवर्तन होगा।

उदाहरण, $\frac{१९}{४}$ इस विषमभिन्न को संयुक्तभिन्न का रूप दो।

यहां १९ ÷ ४ = ४ लब्धि और शेष ३,

$\therefore \quad \frac{१९}{४} = ४\frac{३}{४}$,

उदाहरणमाला (७)

नीचे लिखी हुई विषमभिन्नों को संयुक्तभिन्नों में लाओ

(१) $\frac{२६}{४}$ (२) $\frac{४६}{८}$ (३) $\frac{६१}{९}$ (४) $\frac{९५}{११}$ (५) $\frac{१२३}{१६}$ (६) $\frac{३२३}{१९}$ (७) $\frac{६५९५}{१०००}$ (८) $\frac{५३५३}{२९७}$ (९) $\frac{९७१४}{३५७}$ (१०) $\frac{९२०७०}{४६५}$ (११) $\frac{९८७}{६५४}$ (१२) $\frac{१५२८३७}{५९७}$ (१३) $\frac{२९४५०}{४५७}$ (१४) $\frac{७२४५}{३१५}$ (१५) $\frac{६२८५०४}{७९३५}$

(४) प्रकार—प्रभागजाति भिन्न को भागजाति भिन्न में परिवर्तित कर सकते हैं।

नियम—प्रभागजाति भिन्न के सब अंशों का गुणनफल भागजाति भिन्न का अंश होगा और सब छेदों का गुणनफल उसका छेद होगा।

उदाहरण (१) $\frac{४}{५}$ का $\frac{३}{७}$ इसको भागजाति भिन्न का रूप दो।

यहां $\frac{४}{५}$ का $\frac{३}{७} = \frac{४ \times ३}{५ \times ७} = \frac{१२}{३५}$,

यदि किसी प्रभागजाति भिन्न में संयुक्तभिन्न भी हो तो उसको विषमभिन्न का रूप दे कर तब ऊपर की क्रिया करनी चाहिये। और यदि किसी अंश और छेद दोनों में एक ही संख्या का निःशेष भाग लगता हो तो उस अंश और छेद में उस संख्या का भाग देना चाहिये। क्योंकि ऐसा करने से प्रक्रम (१०९) के अनुसार भिन्नसंख्या के मान में कुछ अन्तर न होगा।

उदाहरण (२) $१\frac{५}{७}$ का $\frac{२१}{२५}$ का $\frac{५}{६}$ इसको भागजाति भिन्न में परिणत करो ।

यहां $१\frac{५}{७}=\frac{१२}{७}$,

$$\therefore १\frac{५}{७} \text{ का } \frac{२१}{२५} \text{ का } \frac{५}{६} = \frac{\overset{२}{\cancel{१२}}}{\underset{१}{\cancel{७}}} \times \frac{\overset{३}{\cancel{२१}}}{\underset{५}{\cancel{२५}}} \times \frac{\overset{१}{\cancel{५}}}{\underset{१}{\cancel{६}}} = \frac{६}{५}$$

यहां ऊपर अंश के स्थान में २१ और नीचे छेद के स्थान में ७ हैं। इन दोनों में ७ का निःशेष भाग जाता है, इसलिये ऊपर के २१ में ७ का भाग दे कर लब्धि ३ को २१ के ऊपर लिखा और २१ को $\cancel{२१}$ इस तरह काट दिया और नीचे के ७ में ७ का भाग दे कर लब्धि १ को ७ के नीचे लिखा और ७ को $\cancel{७}$ इस तरह काट दिया है। इसी तरह यहां १२ और ६ में ६ का और ५ और २५ में ५ का अपवर्तन दिया है। भिन्नसंख्या के अंश और छेद में एक ही संख्या का भाग देने में सर्वत्र ऐसा ही किया जाता है। अब यहां अंश और छेद दोनों में अपवर्तन देने के बाद अंश स्थान में २, ३, १, यह संख्या हैं, इसलिये इनका गुणनफल २ × ३ × १ = ६ को अंश स्थान में रखा और छेद स्थान में १, ५, १, यह संख्या हैं इसलिये इनका गुणनफल १ × ५ × १ = ५ को छेद स्थान में रखा।

नोट—अभिन्न संख्या के नीचे छेद स्थान में १ को रख कर तब आगे गणित करना चाहिये।

उदाहरणमाला (८)

नीचे लिखी हुई प्रभागजाति भिन्नों को भागजाति भिन्नों में परिवर्तित करो।

(१) $\frac{१}{२}$ का $\frac{२}{३}$ (२) $\frac{३}{४}$ का $\frac{५}{६}$ (३) $\frac{३}{८}$ का $\frac{४}{५}$ (४) $\frac{१५}{१६}$ का $\frac{४}{५}$

(५) २ का $\frac{१}{३}$ का $\frac{२}{५}$ (६) ६ का $\frac{५}{७}$ का $\frac{३}{४}$ (७) $३\frac{१}{४}$ का $\frac{८}{१३}$ का $\frac{२}{७}$

(८) $२\frac{२}{३}$ का $\frac{५}{१४}$ का $\frac{७}{८}$ का १२ का $१\frac{२}{३}$ (९) $\frac{१}{२}$ का $२\frac{१}{२}$ का $३\frac{३}{५}$ का ९

(१०) $३\frac{२}{३}$ का $२\frac{३}{४}$ का ४ का $७\frac{१}{२}$　(११) $३\frac{४}{५}$ का $५\frac{३}{४}$ का $\frac{२}{१९}$ का $१\frac{१}{४६}$ (१२) $\frac{३}{४}$ का $\frac{७}{८}$ का $१\frac{१}{९}$ का $\frac{४}{२१}$ का $१\frac{१}{२}$　(१३) $\frac{९}{१०}$ का $\frac{८}{९}$ का $\frac{७}{८}$ का $\frac{६}{७}$ का $\frac{५}{६}$ का $\frac{४}{५}$ का $\frac{३}{४}$ का $\frac{२}{३}$ का $\frac{१}{२}$ (१४) ११७ का $\frac{१४}{१५}$ का $\frac{११}{१२}$ का $\frac{६}{१३}$ का $\frac{२}{११}$ का $\frac{५}{८}$ का $\frac{४}{९}$ का $\frac{३}{७}$　(१५) $\frac{४}{५}$ का ९ का $७\frac{१}{२}$ का $४\frac{२}{३}$ का $\frac{७}{८}$ का $१\frac{१}{७}$

प्रकार ५ वा—भिन्नसंख्या को लघुतम रूप में लाने का प्रकार।

नियम—कोई भिन्नसंख्या अपने लघुतम रूप में तब होती है जब उसके अंश और छेद परस्पर दृढ होते हैं अर्थात् उनका कोई साधारण गुणनखण्ड नहीं होता है। और (९२) प्रक्रम से भिन्नसंख्या के अंश और छेद को परस्पर दृढ़ करने के लिये उनमें उनके महत्तमापवर्तक का भाग देना चाहिये। और अंश और छेद को परस्पर दृढ़ बनाने से ही वह भिन्न संख्या अपने लघुतम रूप में परिणत हो जायगी।

उदाहरण (१) $\frac{१५६}{२२८}$ इसको लघुतम रूप में परिवर्तित करो।

यहां पहिले अंश और छेद के महत्तमापवर्तक के लिये न्यास,

```
१५६ ) २२८ ( १
      १५६
      ----
       ७२ ) १५६ ( २
            १४४
            ----
             १२ ) ७२ ( ६
                  ७२
                  --
```

इस लिये उक्त संख्याओं का महत्तमापवर्तक १२ है,

$\therefore \frac{१५६}{२२८} = \frac{१५६ \div १२}{२२८ \div १२} = \frac{१३}{१९}$ यह उद्दिष्टसंख्या का लघुतम रूप है।

अथवा, यदि (८५) प्रक्रम में कहे हुए सिद्धान्तों की सहायता से अंश और छेद के कोई साधारण गुणनखण्ड शीघ्र मालूम हो सकते हों तो उनका अंश और छेद में बार बार भाग देने से कभी कभी अभीष्ट लघुतम रूप लाघव से सिद्ध हो सकता है। ऐसी स्थिति में महत्तमापवर्तक निकालने का परिश्रम न करना चाहिये।

उदाहरण (२) $\frac{१२०}{२५२}$ को लघुतम रूप में परिणत करो ।

१०
~~३०~~
~~६०~~
न्यास, $\frac{~~१२०~~}{~~२५२~~}$
~~१२६~~
~~६३~~
२१

यहां १२० और २५२ में २ का भाग देने से लब्धि ६० और १२६, इनमें फिर २ का अपवर्तन देने से लब्धि ३० और ६३, इनको फिर ३ से काटने पर लब्धि १० और २१, अब ये अंश और छेद परस्पर दृढ़ होने से $\frac{१०}{२१}$ यही अभीष्ट लघुतम रूप है ।

अथवा, दी हुई भिन्न संख्या के अंश के रूढ गुणनखण्ड बना कर उनको अंशस्थान में रखो और उसके छेद के रूढ गुणनखण्डों को छेदस्थान में रखो । तब प्रभागजाति भिन्न में कहे हुए प्रकार के अनुसार उन अंश और छेद के गुणन खण्डों को परस्पर काटने पर अंश के गुणन खण्डों का गुणन फल अंश-स्थान में रखो और छेद के गुणनखण्डों का गुणनफल छेदस्थान में रखो । तब अभीष्ट लघुतम रूप सिद्ध होगा ।

उदाहरण (३) $\frac{१२६०}{५५४४}$ इसको लघुतम रूप दो ।

यहां १२६० = २ × २ × ३ × ३ × ५ × ७

और ५५४४ = २ × २ × २ × ३ × ३ × ७ × ११

$\therefore \frac{१२६०}{५५४४} = \frac{\cancel{२} \times \cancel{२} \times \cancel{३} \times \cancel{३} \times ५ \times \cancel{७}}{\cancel{२} \times \cancel{२} \times २ \times \cancel{३} \times \cancel{३} \times \cancel{७} \times ११} = \frac{५}{२२}$ यही अभीष्ट लघुतम रूप है ।

नोट—भिन्न संख्या के अंश और छेद की संख्या छोटी हों तो गुणनादि क्रिया करने में लाघव होता है, यही लघुतम रूप देने का प्रधान कारण है । इस लिये जहां जहां भिन्न संख्या से गणित करना हो वहां उसके स्थान में उसका लघुतम रूप लेना चाहिये और यदि अन्त में भिन्न संख्या रूप फल उत्पन्न हो तो वहां उसका लघुतम रूप सर्वत्र लेना चाहिये ।

उदाहरणमाला (६)

नीचे दी हुई भिन्नों को अति संक्षिप्त रूप दो ।

(१) $\frac{७}{४९}$ (२) $\frac{१४}{३५}$ (३) $\frac{१३६}{२८९}$ (४) $\frac{१५४}{७१५}$ (५) $\frac{५५७}{५७९}$

(६) $\frac{२८८}{५४६}$ (७) $\frac{४३२}{१०३६८}$ (८) $\frac{३२०५}{३७९३}$ (९) $\frac{१७८०}{३६०४}$

(१०) $\frac{३९२७}{६१७१}$ (११) $\frac{४९५}{१२१०}$ (१२) $\frac{९९०}{१९३५}$ (१३) $\frac{१७०२}{१८८०}$

(१४) $\frac{३०९४}{३०४२}$ (१५) $\frac{८३९८}{२९३९३}$ (१६) $\frac{३०४२९}{८८६४१}$ (१७) $\frac{१३३१}{१४६४१}$

(१८) $\frac{२२७१}{९९९०}$ (१९) $\frac{१४२८५७}{९९९९९९}$ (२०) $\frac{७६९२३०}{९९९९९९}$

इनको काट कर लघुतमरूप दो ।

(२१) $\frac{३ \times १६}{८ \times १२}$ (२२) $\frac{६ \times १२ \times २१}{३ \times ७ \times ४ \times ३३}$ (२३) $\frac{१५ \times २४ \times ५}{१८ \times १२ \times २५}$

(२४) $\frac{२७ \times २१ \times १२}{८१ \times १६ \times ७}$ (२५) $\frac{३७ \times ३ \times ५ \times १४ \times ३}{१११ \times १५ \times २१ \times २ \times २}$

प्रकार ६ वा—दो वा अधिक भिन्नसंख्याओं को समच्छेद का रूप देने का प्रकार अर्थात् उनको ऐसे रूपों में लाने का प्रकार जिनमें उन सबके छेद परस्पर समान हों ।

यहां यदि उद्दिष्ट भिन्नसंख्याओं में कोई अन्य जाति की भिन्नसंख्या हो तो उसको पहिले भागजाति भिन्न का रूप देना चाहिये और यदि कोई भिन्न अपने लघुतम रूप में न हो तो उसको लघुतम रूप दे कर तब उनको समच्छेद का रूप देना चाहिये ।

नियम—दी हुई भिन्न संख्याओं के छेदों का लघुतमापवर्त्य निकालो । उस लघुतमापवर्त्य में प्रत्येक छेद का भाग दे कर लब्धि से उसके अंश को गुण दो । तब यह सब गुणनफल अभीष्ट अंश होंगें और इन सब के छेद में वह लघुतमापवर्त्य होगा ।

उदाहरण, $\frac{३}{४}$, $\frac{५}{६}$ और $\frac{७}{९}$ इनको समच्छेद का रूप दो ।

यहां छेदों के लघुतमापवर्त्य के लिये न्यास,

२) ४, ६, ९
३) २, ३, ९
   २, १, ३

$\therefore$ २ × ३ × २ × ३ = ३६ यह छेदों का लघुतमापवर्त्य है । अब,

$\because$ ३६ ÷ ४ = ९ $\therefore$ $\frac{३}{४} = \frac{३ \times ९}{४ \times ९} = \frac{२७}{३६}$

$\because$ ३६ ÷ ६ = ६ $\therefore$ $\frac{५}{६} = \frac{५ \times ६}{६ \times ३६} = \frac{३०}{३६}$

$\because$ ३६ ÷ ९ = ४ $\therefore$ $\frac{७}{९} = \frac{७ \times ४}{९ \times ४} = \frac{२८}{३६}$

अतः दी हुई भिन्नों के $\frac{२७}{३६}$, $\frac{३०}{३६}$ और $\frac{२८}{३६}$ ये समच्छेद रूप हैं ।

नोट—यहां छेदों के ३६ इस लघुतमापवर्त्य के स्थान में ७२, १०८, १४४ इत्यादि उन छेदों के साधारण अपवर्त्यों में से कोई एक साधारण अपवर्त्य लेने से भी अभीष्ट सिद्धि हो सकती है। परन्तु छेदों का लघुतम साधारण अपवर्त्य लेने से गुणन और भाग की क्रिया में लाघव होता है।

उदाहरणमाला (१०)

नीचे लिखी भिन्नों को समान छेद वाली भिन्नों में परिवर्तित करो

(१) $\frac{३}{५}, \frac{४}{७}$ (२) $\frac{३}{४}, \frac{४}{५}, \frac{५}{६}$ (३) $\frac{५}{७}, \frac{७}{९}, \frac{११}{१४}$ (४) $\frac{३}{५}, \frac{५}{७}, \frac{४}{९}, \frac{२}{११}$
(५) $\frac{५}{१४}, \frac{२}{२१}, \frac{१३}{३५}, \frac{८}{४२}$ (६) $\frac{७}{१२}, \frac{९}{१६}, \frac{१३}{२०}, \frac{५}{२७}$ (७) $\frac{७}{१८}, \frac{९}{२२}, \frac{११}{६३}, \frac{२}{७७}$
(८) $\frac{१७}{१४३}, \frac{१४}{६५}, \frac{१२}{५५}, \frac{११}{५२}$ (९) $\frac{१५}{७२}, \frac{९}{१०४}, \frac{८}{११७}, \frac{१३}{१२०}, \frac{१७}{१३५}$
(१०) $\frac{११}{१२}, \frac{१२}{१३}, \frac{१३}{१४}, \frac{१४}{१५}, \frac{१५}{१६}$ (११) $\frac{३९}{७७}, \frac{२१}{३५}, \frac{९}{१४}, \frac{१}{३}, \frac{२}{५}, \frac{३}{७}$
(१२) $२\frac{४}{५}$, $\frac{६}{७}$ का $\frac{१४}{१५}$, ८ (१३) ३, $\frac{१४}{१९५}, \frac{१५}{२३१}, \frac{१६}{२५५}$
(१४) $\frac{१}{४२}, \frac{१}{४५}, \frac{१}{४८}, \frac{१}{५४}, \frac{१}{५६}, \frac{१}{६३}, \frac{१}{७२}$ (१५) $\frac{१२१}{२१०}, \frac{४९}{३३०}, \frac{२५}{४६२}, \frac{९}{७७०}, \frac{४}{११५५}$

भिन्नसंख्या के सम्बन्ध के ध्यान में रखने योग्य नियम—

(१) भिन्नसंख्या के अंश को कायम रख कर छेद को जैसे जैसे वढाते वा घटाते जाओगे वैसे वैसे उस भिन्नसंख्या का मान क्रम से कम वा अधिक होगा।

(२) भिन्नसंख्या के छेद को कायम रख कर उसके अंश को जैसे जैसे वढाते वा घटाते जाओगे वैसे वैसे उस भिन्नसंख्या का मान क्रम से अधिक वा न्यून होगा।

(३) दी हुई सम भिन्नसंख्या के अंश और छेद दोनों में एक ही अंक जोड़ कर जो नई भिन्नसंख्या होगी उसका मान दी हुई समभिन्न संख्या के मान से अधिक होगा।

(४) दी हुई समभिन्न संख्या के अंश और छेद दोनों में एक ही अंक घटाने से जो नई भिन्नसंख्या होगी उसका मान दी हुई समभिन्न संख्या के मान से कम होगा।

(५) दी हुई विषमभिन्न संख्या के अंश और छेद दोनों में एक ही अंक जोड़ कर जो नई भिन्नसंख्या होगी उसका मान दी हुई विषमभिन्न संख्या के मान से कम होगा ।

(६) दी हुई विषमभिन्न संख्या के अंश और छेद दोनों में एक ही अंक घटाने से जो नई भिन्नसंख्या होगी उसका मान दी हुई विषमभिन्न संख्या के मान से अधिक होगा ।

(७) समान छेद वाली भिन्नों में सब से बड़ी भिन्न वह होती है जिसका अंश सब से बड़ा होता है और सब से छोटी वह भिन्न होती है जिसका अंश सब से छोटा होता है । जैसे, $\frac{१}{८}$, $\frac{५}{८}$, $\frac{३}{८}$, $\frac{७}{८}$, इन में सब से बड़ी भिन्नसंख्या $\frac{७}{८}$ है, क्योंकि ७ सब से बड़ा अंश है और $\frac{१}{८}$ यह सब से छोटी भिन्न है ।

(८) समान अंश वाली भिन्नों में सब से बडो भिन्न वह होती है जिसका छेद सब से छोटा होता है और सब से छोटी वह भिन्न होती है जिस का छेद सब से बडा होता है । जैसे, $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{४}$, इन में सब से बड़ी भिन्न $\frac{१}{२}$ यह है, क्योंकि २ यह सब से छोटा छेद है । और सब से छोटी $\frac{१}{५}$ यह भिन्न है ।

प्रकार ७ वा—दो वा अधिक भिन्नसंख्याओं को समान अंश वाली भिन्नों में परिवर्तित करने का प्रकार ।

नियम—दी हुई भिन्नसंख्याओं के अंशों का लघुतमापवर्त्य निकालो । तब प्रत्येक अंश का उस लघुतमापवर्त्य में भाग देने से जो लब्धि होगी उससे उसके छेद को गुण दो । तब यह सब गुणनफल अभीष्ट छेद होंगे और उन सब के अंश में वह लघुतमापवर्त्य होगा ।

उदाहरण, $\frac{६}{९१}$, $\frac{१८}{२३}$, $\frac{८}{१३}$ इनको ऐसी भिन्नों में परिवर्तित करो जिनका अंश परस्पर तुल्य होगा ।

यहां अंशों का लघुतमापवर्त्य निकालने के लिये न्यास,

२) ६, १८, ८

३) ३, ९, ४

१, ३, ४

$\therefore$ २×३×३×४=७२ यह अंशों का लघुतमापवर्त्य है। अब,

$\because$ ७२÷६ =१२ $\quad\therefore \frac{६}{११}=\frac{६\times१२}{११\times१२}=\frac{७२}{१३२}$

$\because$ ७२÷१८=४ $\quad\therefore \frac{१८}{२३}=\frac{१८\times४}{२३\times४}=\frac{७२}{९२}$

$\because$ ७२÷८ =९ $\quad\therefore \frac{८}{१३}=\frac{८\times९}{१३\times९}=\frac{७२}{११७}$

अतः दी हुई भिन्नों की सजातीय $\frac{७२}{१३२}$, $\frac{७२}{९२}$, $\frac{७२}{११७}$ ये समान अंश वाली भिन्नें हैं।

भिन्नसंख्याओं का न्यूनाधिकभाव

(१२४) दी हुई भिन्नों में कौन सब से बड़ी वा छोटी है इसको मालूम करने के लिये दी हुई भिन्नों को समान छेद वाली सजातीय भिन्नों में परिवर्तित करो। तब जिस भिन्न का अंश सब से बडा होगा वह सब से बडी भिन्न और जिसका अंश सब से छोटा होगा वह सबसे छोटी भिन्न होगी।

उदाहरण(१) $\frac{३}{७}$, $\frac{१७}{२४}$, $\frac{२३}{४२}$, इनमें सब से बड़ी और सब से छोटी भिन्न कौन है?

यहां छेदों का लघुतमापवर्त्य=१६८ और,

$\because$ १६८÷७ =२४ $\quad\therefore \frac{३}{७}=\frac{३\times२४}{७\times२४}=\frac{७२}{१६८}$

$\because$ १६८÷२४=७ $\quad\therefore \frac{१७}{२४}=\frac{१७\times७}{२४\times७}=\frac{११९}{१६८}$

$\because$ १६८÷४२=४ $\quad\therefore \frac{२३}{४२}=\frac{२३\times४}{४२\times४}=\frac{९२}{१६८}$

अतः $\frac{७२}{१६८}$, $\frac{११९}{१६८}$, $\frac{९२}{१६८}$, इन समान छेद वाली सजातीय भिन्नों में दूसरी का अंश सब से बडा और पहिली का अंश सब से छोटा होने से दी हुई भिन्नों में पहिली सब से छोटी और दूसरी सब से बडी भिन्न है।

अथवा, दी हुई भिन्नों का न्यूनाधिक भाव जानने के लिये दी हुई भिन्नों को समान अंश वाली भिन्नों में परिवर्तित करो। तब जिस भिन्न का छेद सब से छोटा होगा वह सब से बडी और जिसका छेद सब से बड़ा होगा वह सब से छोटी भिन्न होगी।

उदाहरण (२) $\frac{७}{१३}$, $\frac{२१}{२९}$, $\frac{१२}{१७}$, इनमें सब से बड़ी और सब से छोटी भिन्न का निर्णय अंशों के लघुतमापवर्त्य की सहायता से करो।

यहां अंशों का लघुतमापवर्त्य $=८४$ और,

$\because ८४ \div ७ = १२$ $\therefore \frac{७}{१३} = \frac{७ \times १२}{१३ \times १२} = \frac{८४}{१५६}$

$\because ८४ \div २१ = ४$ $\therefore \frac{२१}{२९} = \frac{२१ \times ४}{२९ \times ४} = \frac{८४}{११६}$

$\because ८४ \div १२ = ७$ $\therefore \frac{१२}{१७} = \frac{१२ \times ७}{१७ \times ७} = \frac{८४}{११९}$

अतः $\frac{८४}{१५६}$, $\frac{८४}{११६}$, $\frac{८४}{११९}$ इन समान अंश वाली सजातीय भिन्नों में दूसरी का छेद सब के छेदों से छोटा और पहिली का छेद सब से बडा होने से दी हुई भिन्नों में दूसरी सब से बड़ी और पहिली सब से छोटी भिन्न है।

उदाहरणमाला (११)

नीचे दी हुई भिन्नों में सब से बड़ी और सब से छोटी भिन्नों को बताओ

(१) $\frac{४}{५}$, $\frac{८}{९}$ (२) $\frac{५}{६}$, $\frac{६}{७}$, $\frac{३}{१४}$, (३) $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{२}{५}$, $\frac{३}{८}$ (४) $\frac{२}{५}$, $\frac{३}{७}$, $\frac{५}{१२}$, $\frac{८}{१९}$ (५) $\frac{३}{४}$ का $\frac{८}{१५}$, $\frac{३}{७}$, $\frac{२}{३}$ का $\frac{५}{८}$ (६) $२\frac{१}{२}$ का $\frac{४}{५}$, $२\frac{१}{३}$, ९ का $\frac{२}{७}$, $२\frac{३}{१०}$ (७) $\frac{११}{१२}$, $\frac{१२}{१३}$, $\frac{७}{९}$, $\frac{३}{२६}$, $\frac{७}{३९}$

नीचे लिखी भिन्नों को उनके मान के अनुसार क्रम से लिखो

(८) $\frac{१}{५}$, $\frac{२}{९}$, $\frac{३}{१४}$, $\frac{५}{२३}$, $\frac{८}{३७}$ (९) $\frac{११}{३०}$, $\frac{१६}{३५}$, $\frac{१७}{४०}$, $\frac{१९}{४२}$, $\frac{२३}{४८}$, $\frac{२५}{५६}$
(१०) $\frac{२}{५}$, $\frac{५}{१२}$, $\frac{७}{१७}$, $\frac{१२}{२९}$, $\frac{१९}{४६}$, इन में कौन कौन संख्या $\frac{३१}{७५}$ इस संख्या से बडी और कौन कौन छोटी है?

(११) एक बच्चा प्रति दिन $\frac{७}{१२}$ शीशी दूध पीता है और दूसरा $\frac{९}{१६}$ शीशी दूध पीता है, तो बताओ कौन बच्चा कम दूध पीता है?

भिन्नसंख्याओं का संकलन

(११५) जोड़ समान जाति के पदार्थों का ही होता है भिन्न जाति के पदार्थों का नहीं होता, यह तुमको मालूम हो चुका है। जैसे, ५ रुपये में तुम ३

पौण्ड जोड़ नहीं सकते हो। यहां तक कि तुम ५ रुपये में ३ आनों को भी नहीं जोड़ सकते जब तक तुम रुपये के आनें नहीं बना लेते हो। इसी तरह तुम उन भिन्नों को भी नहीं जोड सकते जिनके छेद परस्पर. समान नहीं हैं। जब तुम उन भिन्नों को, जिन का जोड़ करना है, समच्छेद का रूप दे कर सजातीय भिन्नों में परिवर्तित कर लेते हो तब उनका योग करना सम्भव होता है। इससे यह नियम निकलता है कि जिन भिन्नों का जोड़ करना होता है उनको पहिले समच्छेद का रूप देना चाहिये। तब उन समान छेद वाली सजातीय भिन्नों के अंशों के योग को योगफल के अंशस्थान में रख कर उन समान छेद वाली भिन्नों के छेद को योगफल के छेदस्थान में रखना चाहिये। ऐसा करने से अभीष्ट योगफल सिद्ध होता है। और यदि योगफल की भिन्नसंख्या लघुतम रूप में न हो तो उसको लघुतम रूप देना चाहिये और यदि योगफल की विषम भिन्न संख्या हो तो उसको संयुक्त भिन्न में परिवर्तित करना चाहिये।

यदि योग करने के लिये दी हुई सब भिन्नसंख्याओं के छेद परस्पर समान हों तो उन भिन्नसंख्याओं के अंशों के योग को योगफल के अंशस्थान में रख कर उसके छेदस्थान में दी हुई भिन्नसंख्याओं में से किसी एक का छेद रखने से अभीष्ट योगफल सिद्ध होगा।

उदाहरण (१) $\frac{३}{७}$, $\frac{४}{७}$, $\frac{५}{७}$, इनका योग करो।

यहां $\frac{३}{७}+\frac{४}{७}+\frac{५}{७}=\frac{३+४+५}{७}=\frac{१२}{७}=१\frac{५}{७}$ यह अभीष्ट योगफल है।

उदाहरण (२) $\frac{३}{७}$, $\frac{५}{१४}$, $\frac{३}{४}$, इनका योग करो।

यहां छेदों का लघुतमापवर्त्य = २८ है। अब,

$\because २८ \div ७ = ४$ $\qquad \therefore \frac{३}{७}=\frac{३\times४}{७\times४}=\frac{१२}{२८}$

$\because २८ \div १४ = २$ $\qquad \therefore \frac{५}{१४}=\frac{५\times२}{१४\times२}=\frac{१०}{२८}$

$\because २८ \div ४ = ७$ $\qquad \therefore \frac{३}{४}=\frac{३\times७}{४\times७}=\frac{२१}{२८}$

$\therefore \frac{३}{७}+\frac{५}{१४}+\frac{३}{४}=\frac{१२}{२८}+\frac{१०}{२८}+\frac{२१}{२८}=\frac{१२+१०+२१}{२८}=$

$\frac{४३}{२८}=१\frac{१५}{२८}$ यह अभीष्ट योग फल है।

नोट—यहां पर्याप्त अभ्यास होने पर ऊपर के उदाहरण की तरह समान छेद वाली भिन्नों को अलग लिखने की आवश्यकता नहीं होती है। केवल उन छेदों के लघुतमापवर्त्य को एक ही बार नीचे लिख कर उसके ऊपर एक लम्बी रेखा कर के उस रेखा के ऊपर उन समच्छेद भिन्नों के अंशों को लिखना चाहिये।

(११६) यदि योग करने के लिये दी हुई भिन्नों में कुछ विषमभिन्न संख्याएँ हों तो लाघव के लिये उनको पहिले संयुक्त भिन्नों में परिवर्तित करना चाहिये। और यदि कुछ अभिन्न संख्याएँ भी हों तो उनका और संयुक्त भिन्नों की अभिन्नसंख्याओं का योग अलग करना चाहिये। और संयुक्तभिन्नों की भिन्न संख्याओं का जोड़ अलग करना चाहिये। यदि उन भिन्नसंख्याओं के योगफल की विषमभिन्न संख्या हो तो उसको संयुक्तभिन्न में परिणत कर के उस संयुक्त भिन्न के अभिन्न भाग को भी उन अभिन्न संख्याओं के योग में जोड़ना चाहिये। और यदि कोई भिन्न अपने लघुतम रूप में न हो तो उसको लघुतम रूप में ला कर तब यह क्रिया करनी चाहिये।

उदाहरण (३) $२\frac{१}{३}$, $\frac{१०}{१२}$, $\frac{१९}{४}$, और ७, इनका योग करो।

यहां $२\frac{१}{३} = २ + \frac{१}{३}$, $\frac{१०}{१२} = \frac{५}{६}$, $\frac{१९}{४} = ४ + \frac{३}{४}$,

$$\therefore २\frac{१}{३} + \frac{१०}{१२} + \frac{१९}{४} + ७ = २ + \frac{१}{३} + \frac{५}{६} + ४ + \frac{३}{४} + ७,$$

$$= (२ + ४ + ७) + \left(\frac{१}{३} + \frac{५}{६} + \frac{३}{४}\right),$$

$$= १३ + \frac{४ + १० + ९}{१२},$$

$$= १३ + \frac{२३}{१२},$$

$$= १३ + १ + \frac{११}{१२},$$

$$= १४ + \frac{११}{१२},$$

$= १४\frac{११}{१२}$ यह अभीष्ट योग फल है।

उदाहरण (४) ७ रु० ९ आ० २$\frac{१}{२}$ पा०, ५ रु० १० आ० ७$\frac{११}{१२}$ पा० और १३ रु० १४ आ० ६$\frac{२}{३}$ पा० इनका योग करो।

	रु०	आ०	पा०
न्यास—	७	९	२$\frac{१}{२}$
	५	१०	७$\frac{११}{१२}$
	१३	१४	६$\frac{२}{३}$
	२७	२	५$\frac{१}{१२}$=योग,

यहां २$\frac{१}{२}$ पा० + ७$\frac{११}{१२}$ पा० + ६$\frac{२}{३}$ पा० = (२+७+६) पा० + ($\frac{१}{२}$ + $\frac{११}{१२}$ + $\frac{२}{३}$) पा० = १५ पा० + $\frac{६+११+८}{१२}$ पा० = १५ पा० + $\frac{२५}{१२}$ पा० = १५ पा० + २ पा० + $\frac{१}{१२}$ पा० = १७ पा० + $\frac{१}{१२}$ पा०, इसमें $\frac{१}{१२}$ पा० को योग के भिन्न के स्थान में रखा, और १७ पा० = १ आ० ५ पा०, इसमें ५ पा० को $\frac{१}{१२}$ पा० की बांई ओर योगस्थान में रखा, और हाथ लगे १ आ० को आनों का जोड़ ३३ आ० में जोड़ा तो ३४ आ० = २ रु० २ आ०, इसमें २ आ० को योगस्थान में रखा, और हाथ लगे २ रु० को रुपयों का जोड़ २५ रु० में जोड़ा तो २७ रु० को योगस्थान में रखा।

उदाहरणमाला (१२)

इनका योग करो

(१) $\frac{१}{५}$, $\frac{२}{५}$, $\frac{४}{५}$ (२) $\frac{२}{३}$, $\frac{३}{४}$ (३) $\frac{७}{२४}$, $\frac{१}{४८}$ (४) ७$\frac{१}{३}$, $\frac{५}{६}$ (५) $\frac{२}{७}$, ५$\frac{१}{४}$ (६) $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{७}$ (७) $\frac{७}{८}$, $\frac{९}{१०}$, $\frac{११}{१२}$ (८) $\frac{१३}{३५}$, $\frac{२३}{४०}$, $\frac{३}{५६}$ (९) $\frac{४}{७}$, $\frac{१}{२४}$, $\frac{३}{५६}$ (१०) $\frac{१}{१०}$, $\frac{५}{१८}$, $\frac{८}{४५}$

इनका मान निकालो

(११) $\frac{१७}{१८}$ + $\frac{२१}{३२}$ + $\frac{९१}{९९}$ (१२) $\frac{५}{२१}$ + $\frac{५}{३३}$ + $\frac{१}{३५}$ + $\frac{२१}{५५}$ (१३) $\frac{१}{३३}$ + $\frac{२७}{३९}$ + $\frac{५}{७७}$ + $\frac{३}{९१}$ (१४) $\frac{१०४}{१०५}$ + $\frac{१६३}{१६५}$ + $\frac{२३०}{२३१}$ + $\frac{३१८}{३८५}$ (१५) १$\frac{१}{२}$ + २$\frac{२}{३}$ + ३$\frac{३}{४}$ +

$४\frac{४}{५}+५\frac{५}{६}$ (१६) $१०\frac{१}{७}+११\frac{१}{८}+१२\frac{१}{९}+१३\frac{१}{१०}+१४\frac{१}{१२}$ (१७) $\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+\frac{१}{८}+\frac{१}{१६}+\frac{१}{३२}+\frac{१}{६४}+\frac{१}{१२८}+\frac{१}{२५६}$ (१८) $२\frac{१}{५}+५\frac{३}{७}$ का $\frac{२}{३}\frac{१}{५}+१\frac{१}{१०}$ का $७\frac{१}{५}$ का $३\frac{१}{२}$ (१९) १ पौं० ९ शि० $२\frac{३}{८}$ पे०, २ पौं० १ शि० $५\frac{३}{४}$ पे०, ३ पौं० ७ शि० $\frac{१५}{१६}$ पे०, और १ पौ० १ शि० $३\frac{१}{२}$ पे० इनका योग करो।

(२०) एक हौज में ३ पाइप लगे हैं, एक पाइप उस हौज को ९ घंटे में, दूसरा १२ घंटे में और तीसरा १८ घंटे में भर देता है, यदि तीनों पाइप एक साथ खोल दिये जांय तो ३ घण्टे में उस पूरे हौज का कौन सा हिस्सा भरेगा?

(२१) एक काम को एक मनुष्य ८ घण्टे में, दूसरा ७ घण्टे में और तीसरा १४ घण्टे में कर सकता है, यदि तीनों मनुष्य मिल कर उस काम को करने लगे तो २ घण्टे में वे सब उस काम का कौन सा भाग पूरा करेंगे?

(२२) यहां नीचे एक योग चक्र दिया गया है। इसमें हर एक खड़ी, आडी वा तिरछी पङ्क्ति की भिन्नसंख्याओं का जोड़ $\frac{१}{१४०}$ होता है। इस प्रकार इसमें योग के आठ उदाहरण हैं।

$\frac{१}{५०४}$	$\frac{१}{६३०}$	$\frac{१}{२८०}$
$\frac{१}{२५२}$	$\frac{१}{४२०}$	$\frac{१}{१२६०}$
$\frac{१}{८४०}$	$\frac{१}{३१५}$	$\frac{१}{३६०}$

भिन्नसंख्याओं का व्यवकलन

(११७) अन्तर करने के लिये दी हुई सब भिन्नसंख्याओं का छेद एक ही हो तो उनके अंशों का अन्तर अंशस्थान में लिखो और छेदस्थान में दी हुई भिन्नसंख्याओं में से किसी एक का छेद रखो।

उदाहरण (१) $\frac{५}{७}$ में से $\frac{२}{७}$ को घटाओ।

यहां $\frac{५}{७}-\frac{२}{७}=\frac{५-२}{७}=\frac{३}{७}$ यह अभीष्ट अन्तर है।

(११८) यदि दी हुई भिन्नसंख्याओं के छेद परस्पर भिन्न हों तो उनको समच्छेद का रूप दो। तब उन समान छेद वाली भिन्नों के अंशों का अन्तर अंशस्थान में रख कर छेदस्थान में उस समान छेद को रखो।

उदाहरण (२) $\frac{४}{५}$ में से $\frac{३}{७}$ को घटाओ।

यहां $\frac{४}{५} - \frac{३}{७} = \frac{२८}{३५} - \frac{१५}{३५} = \frac{२८-१५}{३५} = \frac{१३}{३५}$ यह अभीष्ट अन्तर है।

उदाहरण (३) ७ में से $\frac{३}{१५}$ को घटाओ।

यहां $७ - \frac{३}{१५} = \frac{७}{१} - \frac{३}{१५} = \frac{१०५}{१५} - \frac{३}{१५} = \frac{१०५-३}{१५} = \frac{\cancel{१०२}^{३४}}{\cancel{१५}_{५}} = \frac{३४}{५}$

$= ६\frac{४}{५}$ यह अभीष्ट अन्तर है।

उदाहरण (४) ४ और $३\frac{१}{४}$ इनका अन्तर करो।

यहां $४ - ३\frac{१}{४} = (४ - ३) - \frac{१}{४} = १ - \frac{१}{४} = \frac{४}{४} - \frac{१}{४} = \frac{४-१}{४}$

$= \frac{३}{४}$ यह अभीष्ट अन्तर है।

(११६) यदि वियोज्य और वियोजक दोनों की संयुक्तभिन्न संख्या हों तो उनके अभिन्न भागों का अन्तर अभिन्नसंख्या के स्थान में रखो। और भिन्न भागों का अन्तर भिन्नसंख्या के स्थान में रखो। यहां यदि वियोज्य की भिन्न वियोजक की भिन्न से न्यून हो तो उनका अन्तर ऋण होगा, इस लिये उस ऋण अन्तर को १ में घटा कर शेष को भिन्नसंख्या के स्थान में रखो। और अभिन्न संख्याओं के अन्तर में १ घटा दो। यहां वियोज्य और वियोजक की भिन्नों में कोई अपने लघुतम रूप में न हो तो उसको लघुतम रूप देना चाहिये और यदि कोई विषम भिन्न हो तो उसको संयुक्तभिन्न का रूप देने से लाघव होता है।

उदाहरण (५) $९\frac{२}{१५}$ में से $\frac{३०}{८}$ को घटाओ।

यहां $\frac{३०}{८} = \frac{१५}{४} = ३\frac{३}{४}$,

$\therefore ९\frac{२}{१५} - \frac{३०}{८} = ९\frac{२}{१५} - ३\frac{३}{४} = (९ - ३) + (\frac{२}{१५} - \frac{३}{४})$

$= ६ + (\frac{८}{६०} - \frac{४५}{६०})$ ....यहां इस समच्छेद के रूप से स्पष्ट मालूम होता है कि वियोज्य की भिन्न से वियोजक की भिन्न बड़ी है। इस लिये अभिन्नसंख्याओं का अन्तर ६ में १ घटा या है और उन भिन्नों के $-\frac{३७}{६०}$ इस ऋण अन्तर को एक में घटा दिया है।

$= ६ + (\frac{८ - ४५}{६०})$

$= (६ - १) + (१ - \frac{३७}{६०})$

$= ५ + \frac{२३}{६०} = ५\frac{२३}{६०}$ यह अभीष्ट अन्तर है।

(१२०) जब धन, ऋण चिन्हों से युक्त कई भिन्न संख्याओं का मान निकालना होता है तब (२५) प्रक्रम के अनुसार धन चिन्हों से युक्त सब भिन्नसंख्याओं का योग करो। फिर ऋण चिन्हों से युक्त सब भिन्नसंख्याओं का योग करो। तब इन दोनों योगों का अन्तर करो वही उत्तर होगा। और यदि धन भिन्नों का योग ऋण भिन्नों के योग से अधिक वा न्यून होगा तो उत्तर को क्रम से धन वा ऋण समझना चाहिये। और उत्तर को सर्वदा लघुतम रूप में लिखना चाहिये।

उदाहरण (५) $\frac{१}{२} - \frac{१}{३} + \frac{१}{५} - \frac{१}{६}$ इनका मान क्या है?

यहां $\frac{१}{२}$ और $\frac{१}{५}$ इन धनभिन्नों का योग,

$\frac{१}{२} + \frac{१}{५} = \frac{५ + २}{१०} = \frac{७}{१०}$, और $-\frac{१}{३} - \frac{१}{६}$ इन ऋणभिन्नों का योग,

$-\frac{१}{३} - \frac{१}{६} = -\frac{२}{६} - \frac{१}{६} = \frac{-२-१}{६} = -\frac{३}{६} = -\frac{१}{२}$,

$\therefore \frac{७}{१०} - \frac{१}{२} = \frac{७-५}{१०} = \frac{२}{१०} = \frac{१}{५}$ उत्तर,

उदाहरणमाला (१३)

घटाओ

(१) $\frac{७}{९}$ में से $\frac{४}{९}$ को (२) $\frac{३}{४}$ में से $\frac{१}{२}$ को (३) $\frac{५}{६}$ में से $\frac{७}{१३}$ को (४) $\frac{२}{२१}$ में से $\frac{१}{३५}$ को (५) $\frac{७}{४५}$ में से $\frac{१}{१५}$ को (६) $१\frac{७}{१२}$ में से $\frac{२}{१९}$ को (७) $२१\frac{३}{५}$ में से $१७\frac{९}{१०}$ को (८) $\frac{११७}{५८}$ में से $१\frac{४}{७}$ को (९) $\frac{२७}{४}$ में से $\frac{३}{१५}$ को

(१०) $१४\frac{१}{३}$ में से $३\frac{१}{५}$ को (११) $२६\frac{२}{५}$ में से $१८\frac{१२}{२३}$ को

(१२) $\frac{१०३}{१२}$ में से $\frac{१२}{१०३}$ को (१३) $१७२\frac{१}{८}$ में से $\frac{९७}{८}$ को

(१४) $२१\frac{२}{१५}$ में से $७\frac{१}{९}$ को (१५) $५०\frac{७}{८१}$ में से $४०\frac{८}{२७}$ को

(१६) $३९\frac{१०}{१३}$ में से $२८\frac{२०}{२१}$ को (१७) $३४\frac{१}{८}$ में से $२४\frac{१}{७}$ को

(१८) ७ में से $\frac{२}{२१}$ को (१९) १० में से $\frac{१०}{१९}$ को (२०) २० में से $९\frac{२०}{२१}$ को

इनका मान निकालो

(२१) $\frac{६}{९१} - \frac{१}{१५६} + \frac{११}{१६८}$ (२२) $\frac{१}{६०} - \frac{१}{१२०} + \frac{१}{३६०}$

(२३) $\frac{१}{१८९} + \frac{१}{२१६} - \frac{१}{७२८}$ (२४) $\frac{१}{६६} - \frac{३}{७७} + \frac{१९}{७८} - \frac{६}{९१}$

(२५) $२\frac{१}{२} + ३\frac{४}{५} - १\frac{१}{३} + \frac{१}{५} - १\frac{१}{६}$

(२६) ७ रु० २ आ० $३\frac{१}{४}$ पा० में से २ रु० १३ आ० $११\frac{३}{८}$ पा० को घटाओ ।

(२७) १३ रु० ९ आ० ६ पा० में से ७ रु० १० आ० $५\frac{३}{७}$ पा० को घटाओ ।

(२८) १४ पौं० ७ शि० $३\frac{५}{१६}$ पे० में से ३ पौं० १७ शि० $९\frac{७}{८}$ पे० को घटाओ ।

(२९) एक संख्या का चतुर्थांश उसके द्वादशांश से ६ अधिक है तो उस संख्या को बताओ ।

(३०) एक मनुष्यने अपने धन का $\frac{५}{१२}$ भाग एक लड़के को और $\frac{७}{१८}$ भाग दूसरे लड़के को दिया, तो उसके पास सब धन का कौन सा भाग शेष रहा ?

भिन्नसंख्याओं का गुणन

(१२१) भिन्नसंख्या को अभिन्नसंख्या से गुणा करना हो तो उस भिन्नसंख्या के अंश को अभिन्नसंख्या से गुण कर गुणनफल को अंशस्थान में रखो ।

और छेद के स्थान में उस भिन्न का छेद रखो। यदि भिन्न का छेद और अभिन्न-संख्या इन दोनों में किसी एक ही संख्या का निःशेष भाग लगता हो तो प्रभागजाति भिन्न में कहे हुए प्रकार के अनुसार उनको काट कर तब गुणनफल करो। और उत्तर को सर्वदा लघुतम रूप में लिखो। और यदि उत्तर विषमभिन्न में हो तो उसको संयुक्त भिन्न में लिखो।

उदाहरण (१) $\frac{५}{१२}$ को ४ से गुणा करो।

यहां $\frac{५}{१२}$ को ४ से गुणा करने का अर्थ (२७) प्रक्रम से यह होता है कि $\frac{५}{१२}$ को ४ स्थान में रख कर उन सब का योग करना, तब $\frac{५}{१२} \times ४ = \frac{५}{१२} + \frac{५}{१२} + \frac{५}{१२} + \frac{५}{१२} = \frac{५+५+५+५}{१२} = \frac{५ \times \cancel{४}}{\cancel{१२}_{३}} = \frac{५}{३} = १\frac{२}{३}$ उत्तर,

नोट—इससे (११०) प्रक्रम के नियम की सत्यता प्रमाणित होती है कि भिन्नसंख्या के अंश को गुणना उसके छेद को भागने के बराबर होता है। और किसी अभिन्नसंख्या का पावहिस्सा, अद्धा, पौना, सवैया करना उस अभिन्नसंख्या को क्रम से $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{२}$, $\frac{३}{४}$, $१\frac{१}{४}$ से गुणा करने के बराबर होता है।

(१२२) संयुक्तभिन्न को अभिन्नसंख्या से गुणा करना हो तो उस अभिन्न संख्या से संयुक्तभिन्न की अभिन्नसंख्या और भिन्नसंख्या दोनों को गुण कर गुणनफलों का योग अभीष्ट गुणनफल होता है। किन्तु गुण्य गुणक दोनों की संयुक्तभिन्न संख्या हों तो उनको विषमभिन्न संख्या में परिवर्तित कर के तब उनका गुणन करने में लाघव होता है।

उदाहरण (२) $९\frac{७}{१२}$ को ४ से गुणा करो।

यहां $९\frac{७}{१२} \times ४ = ९ \times ४ + \frac{७}{\cancel{१२}_{३}} \times \cancel{४} = ३६ + \frac{७}{३} = ३६ + २\frac{१}{३} = ३८\frac{१}{३}$ यह उत्तर है।

(१२३) दो वा अधिक भिन्नसंख्याओं का गुणन करने में सब भिन्न संख्याओं के अंशों का गुणनफल अंशस्थान में रखो और छेदों का गुणनफल छेदस्थान में रखो। तब जो भिन्नसंख्या होगी वही अभीष्ट गुणनफल होगा। अंश और छेद दोनों में किसी एक संख्या का निःशेष भाग लगता हो तो उन अंश और छेद दोनों को काट कर तब यह क्रिया करनी चाहिये। और यहां संयुक्त भिन्नों को विषमभिन्नों में परिवर्तित करना चाहिये और उत्तर को लघुतम रूप में लिखना चाहिये।

उदाहरण (३) $\frac{२}{३}$, $\frac{३}{४}$, १$\frac{५}{६}$ इनका गुणनफल करो ।

यहां १$\frac{५}{६}$ = $\frac{११}{६}$, तब

$$\frac{\overset{१}{\cancel{२}}}{३} \times \frac{\overset{१}{\cancel{३}}}{\underset{२}{\cancel{४}}} \times \frac{११}{\underset{२}{\cancel{६}}} = \frac{१ \times १ \times ११}{३ \times २ \times २} = \frac{११}{१२} \text{ उत्तर ,}$$

नोट—काटने में यदि सभी अंश और छेद कट जाँय तो उत्तर में १ लिखना चाहिये । शून्य को कभी न लिखना चाहिये । और काटने में जहां १ लब्धि आती है उसको उस कटे हुए अङ्क पर प्रायः नहीं लिखते हैं ।

उदाहरण (४) $\frac{८}{५}$, $\frac{५}{६}$, $\frac{३}{४}$ इनका गुणनफल करो ।

$$\text{यहां } \frac{\overset{१}{\cancel{\overset{२}{\cancel{८}}}}}{\underset{१}{\cancel{५}}} \times \frac{\overset{१}{\cancel{५}}}{\underset{१}{\cancel{\underset{२}{\cancel{६}}}}} \times \frac{\overset{१}{\cancel{३}}}{\underset{१}{\cancel{४}}} = \frac{१ \times १ \times १}{१ \times १ \times १} = \frac{१}{१} = १ \text{ उत्तर ,}$$

नोट—प्रभागजाति भिन्न में "का" इसका अर्थ गुणन होता है । जैसे, $\frac{१}{२}$ का $\frac{१}{८}$ = $\frac{१}{२} \times \frac{१}{८} = \frac{१}{१६}$, यहां यदि हम रुपया इस परिमाण को लें तो १ रुपये का $\frac{१}{२}$ = ८ आने, और ८ आ० का $\frac{१}{८}$ अर्थात् ८ आ० इस परिमाण के ८ समान भाग कर के उनमें से एक भाग का मान १ आना है जो कि १ रुपये का $\frac{१}{१६}$ भाग है ।

उदाहरणमाला (१४)

गुण दो

(१) $\frac{२}{१५}$ को ३, ५, ६ और १० से (२) $\frac{७१}{६०}$ को ४, ५, ८ और ९ से
(३) $\frac{५९}{३६}$ को ९, १२, १८ और २४ से (४) $\frac{१७}{२५}$ को १५, ३५, ७५ और १०० से
(५) $\frac{३५}{६४}$ को ८, २४, ३६ और ११२ से (६) ३$\frac{१}{३}$ को ४ से
(७) ९$\frac{९}{१०}$ को ३९ से (८) ९९$\frac{७}{१०}$ को ३२ से (९) ९९$\frac{९९}{१००}$ को ९ से
(१०) ३१९$\frac{७२९}{७३०}$ को २० से

इनका मान निकालो

(११) $\frac{१}{३} \times \frac{१}{४}$ (१२) $\frac{१५}{३२} \times \frac{११}{१२}$ (१३) १$\frac{७}{८} \times \frac{४}{५}$ (१४) $\frac{६}{९} \times$ ४$\frac{१}{८}$
(१५) ३$\frac{२१}{२५} \times$ २$\frac{१}{३}$ (१६) ३$\frac{१}{२} \times$ ४$\frac{१}{३} \times$ ५$\frac{१}{४}$ (१७) $\frac{१०}{३३} \times \frac{२१}{२६} \times \frac{६५}{७७}$
(१८) $\frac{३५}{७२} \times \frac{१३६}{१९५} \times \frac{१४३}{३२३} \times \frac{१७१}{३०८}$ (१९) $\frac{३}{४} \times \frac{७}{८} \times \frac{१०}{९} \times \frac{४}{२१} \times$ १$\frac{१}{२}$
(२०) २$\frac{१}{२}$ का ३$\frac{१}{४} \times$ १$\frac{१}{५}$ का २$\frac{२}{१३} \times$ १$\frac{१}{३}$

(२१) एक मनुष्य १ घण्टे में २$\frac{३}{८}$ मील चलता है तो १०$\frac{१}{२}$ घण्टे में कितना चलेगा ?

(२२) एक मनुष्य एक काम को १२ घण्टे में और दूसरा १० घण्टे में पूरा करता है। यदि दोनों मनुष्य एक साथ काम करें तो ४ घण्टे में वे काम का कौन सा हिस्सा समाप्त करेंगे ?

(२३) एक हौज एक पाइप से ३६ घण्टे में और दूसरे से ४८ घण्टे में पूरा भर जाता है। यदि दोनों पाइप एक साथ खोल दिये जांय तो १६ घण्टे में हौज का कौन सा हिस्सा खाली रह जायगा ?

(२४) एक मेज का मूल्य १०$\frac{३}{१६}$ रु० है और एक कुर्सी का मूल्य उसका आधा है, तो १६ मेजें और ३२ कुर्सियां कितने में आयेंगी ?

(२५) यह नीचे गुणन चक्र दिया है, इसमें हर एक खडी, आडी वा तिरछी पंक्ति की भिन्न संख्याओं का गुणनफल $\frac{१२५}{२९१६}$ यही होता है। इस प्रकार इसमें गुणन के आठ उदाहरण हैं।

$\frac{१२७}{१६२}$	$\frac{५१०३}{५०००}$	$\frac{१२५०}{१७०१}$
$\frac{५०}{६३}$	$\frac{५}{६}$	$\frac{·७}{८}$
$\frac{१८९}{१००}$	$\frac{३१२५०}{४५९२७}$	$\frac{९}{१०}$

भिन्नसंख्याओं का भाग

(१२४) भाजक के अंश को छेद के स्थान में और छेद को अंश के स्थान में रखो अर्थात् भाजक की भिन्न को व्युत्क्रमभिन्न में परिवर्तित करो। तब भाज्य और उलटाया हुआ भाजक इनका भिन्नसंख्या के गुणनविधि के अनुसार गुणन करो। जो गुणनफल होगा वही अभीष्ट लब्धि होगी। यदि भाजक की अभिन्न संख्या हो तो उसके नीचे १ छेद रख कर उसको उलट दो। तब भाज्य और भाजक का गुणन करो। यहां पर भी लाघव के लिये संयुक्तभिन्न को विषमभिन्न में परिवर्तित करो। और उत्तर को लघुतम रूप में लिखो।

उदाहरण (१) $\frac{३}{७}$ को २ से भाग दो ।

यहां $२ = \frac{२}{१}$,

$\therefore \frac{३}{७} \div \frac{२}{१} = \frac{३}{७} \times \frac{१}{२} = \frac{३}{१४}$ उत्तर ,

क्योंकि, $\frac{३}{७} = \frac{३ \times २}{७ \times २}$ (१०९) प्र० से,

$\therefore \frac{३}{७} \div २ = \frac{३ \times २}{७ \times २} \div २ = \frac{३ \times २ \div २}{७ \times २}$ (१११) प्र० से,

अतः $\frac{३}{७} \div २ = \frac{६ \div २}{७ \times २} = \frac{३}{१४}$ इस तरह यह ऊपर का नियम सिद्ध होता है ।

उदाहरण (२) $\frac{३}{५}$ में $\frac{२}{७}$ का भाग दो ।

$\frac{३}{५} \div \frac{२}{७} = \frac{३}{५} \times \frac{७}{२} = \frac{२१}{१०} = २\frac{१}{१०}$ उत्तर ,

यहां ($\frac{३}{५} \div \frac{२}{७}$) इस लब्धि का ७ वा हिस्सा ($\frac{३}{५} \div २$) यह लब्धि है । क्योंकि $\frac{२}{७}$ इससे २ सात गुने हैं । और भाजक जैसा जैसा कम वा अधिक होता है वैसी लब्धि क्रम से अधिक वा कम होती है । इसी नियम से $\frac{३}{५}$ में २ का भाग देने से जो लब्धि होगी उससे सात गुनी लब्धि $\frac{३}{५}$ में $\frac{२}{७}$ का भाग देने से होगी । अब, उदाहरण (१) के अनुसार,

$\frac{३}{५} \div २ = \frac{३}{५ \times २}$, इस लिये $\frac{३}{५ \times २}$ इसको ७ से गुणने पर अभीष्ट लब्धि होगी ।

परन्तु $\frac{३}{५ \times २} \times ७ = \frac{३ \times ७}{५ \times २}$ (११०) प्रक्रम से,

$\therefore \frac{३ \times ७}{५ \times २} = \frac{२१}{१०} = २\frac{१}{१०} =$ अभीष्ट लब्धि होती है ।

(१२५) किसी भिन्नसंख्या में दूसरी भिन्नसंख्या वा अभिन्न संख्या का भाग देने से अथवा किसी भिन्नसंख्या का दूसरी भिन्नसंख्या वा अभिन्नसंख्या में भाग देने से जो लब्धि होती है उसको **मिश्रभिन्न** कहते हैं अर्थात् जिस भिन्नसंख्या के अंश और छेद दोनों वा दो में से कोई एक भागजाति भिन्न, प्रभागजाति भिन्न वा संयुक्तभिन्न होता है उसको **मिश्रभिन्न** कहते हैं, यह (११२) प्रक्रम में कहा जा चुका है । अब मिश्रभिन्न को भाग जाति भिन्न का रूप देने में वही क्रिया करनी पड़ती है जो क्रिया एक भिन्न का दूसरी भिन्न में भाग देने में करनी पड़ती है । यहां मिश्रभिन्न के अंशस्थान में वा छेदस्थान में कोई अभिन्नसंख्या हो तो उसके नीचे १ छेद रखकर गणित करना चाहिये । यह सब विषय नीचे के उदाहरणों से स्पष्ट होगा ।

जैसे, (१) $\dfrac{\frac{३}{५}}{\frac{९}{१०}} = \dfrac{३}{५} \div \dfrac{९}{१०} = \dfrac{३}{५} \times \dfrac{१०}{९} = \dfrac{२}{३}$,

(२) $\dfrac{५\frac{१}{३}}{८} = \dfrac{\frac{१६}{३}}{\frac{८}{१}} = \dfrac{१६}{३} \div \dfrac{८}{१} = \dfrac{१६}{३} \times \dfrac{१}{८} = \dfrac{२}{३}$,

(३) $\dfrac{२}{३\frac{१}{७}} = \dfrac{\frac{२}{१}}{\frac{२२}{७}} = \dfrac{२}{१} \div \dfrac{२२}{७} = \dfrac{२}{१} \times \dfrac{७}{२२} = \dfrac{७}{११}$,

(४) $\dfrac{८ - \frac{१}{७}}{९ + \frac{१}{२}} = \dfrac{\frac{५६}{७} - \frac{१}{७}}{\frac{१८}{२} + \frac{१}{२}} = \dfrac{\frac{५६-१}{७}}{\frac{१८+१}{२}} = \dfrac{\frac{५५}{७}}{\frac{१९}{२}} = \dfrac{५५}{७} \div \dfrac{१९}{२} = \dfrac{५५}{७} \times \dfrac{२}{१९} = \dfrac{११०}{१३३}$

(५) $\dfrac{\frac{५}{८} \text{ का } २१\frac{१}{३}}{२\frac{१}{१६}} = \dfrac{\frac{५}{८} \times \frac{६४}{३}}{\frac{३३}{१६}} = \dfrac{\frac{४०}{३}}{\frac{३३}{१६}} = \dfrac{४०}{३} \div \dfrac{३३}{१६} = \dfrac{४०}{३} \times \dfrac{१६}{३३} = \dfrac{६४०}{९९} =$

$६\dfrac{४६}{९९}$, इत्यादि।

उदाहरणमाला (१५)

भाग दो

(१) ८ में $\frac{६}{७}$ का (२) $१३\frac{१}{३}$ में $\frac{५}{६}$ का (३) $\frac{५}{६}$ में $\frac{३}{४}$ का (४) $५०\frac{१}{२}$ में $७\frac{३}{४}$ का (५) $\frac{३२}{६३}$ में $\frac{१८}{३०}$ का (६) $\frac{४२९}{५३२}$ में $\frac{३२६}{३६८}$ का (७) $\frac{६३६}{५५५}$ में $\frac{६}{१११}$ का (८) $\frac{५४३}{६७२}$ में $\frac{१८१}{१९२}$ का (९) ४३२ में $\frac{१४४}{१७९}$ का (१०) $१७\frac{३}{५}$ में $(५ - \frac{३}{७})$ का (११) $\frac{९}{६}$ में $(\frac{३}{४} \text{ का } \frac{५}{६})$ का (१२) $(१७ - \frac{४}{५})$ में $(८ - \frac{३}{७})$ का (१३) $(१ - \frac{७}{१२})$ में $(\frac{१५}{१६} \text{ का } \frac{६}{९})$ का (१४) $(\frac{३}{४} + \frac{४}{५})$ में $(\frac{२}{३} + \frac{५}{६})$ का (१५) $(\frac{३}{७} \text{ का } \frac{५}{९})$ में $(\frac{१}{२} \text{ का } \frac{३}{४} \text{ का } \frac{५}{६})$ का

(१६) वह कौन संख्या है? जिसको $३\frac{७}{१९}$ से गुण दो तो गुणनफल $१३\frac{५}{७}$ होता है।

(१७) १२ जिसका $\frac{४}{५}$ होता है वह संख्या कौन है?

(१८) २० जिसका $३\frac{१}{३}$ होता है वह कौन संख्या है?

(१९) $३\frac{३}{८}$ जिसका $१\frac{३}{७}$ होता है वह संख्या कौन है ?

(२०) $१\frac{१}{२}$ रु० में एक पुस्तक मिलती है तो $१३\frac{१}{२}$ रु० में कितनी पुस्तकें मिलेंगी ?

(२१) एक घोड़े का मूल्य $८\frac{९}{१०}$ पौं० है तो $१५१\frac{८}{१०}$ पौं० में कितने घोड़े मिलेंगे ?

(२२) एक रेलगाड़ी एक घण्टे में $२७\frac{३}{४}$ मील जाती है तो १४८ मील कितने घण्टों में जायेगी ?

(२३) एक पहिये का परिधि $१\frac{५}{६}$ गज हो तो $२\frac{१}{२}$ मील जाने में वह पहिया कितने चक्कर करेगा ?

इनको सरल करो ।

(२४) $\frac{\frac{१}{२}}{\frac{२}{३}}$ (२५) $\frac{७}{\frac{३}{४}}$ (२६) $\frac{\frac{५}{८}}{३}$ (२७) $\frac{३\frac{१}{२}}{५}$ (२८) $\frac{७}{४\frac{२}{३}}$

(२९) $\frac{६ - \frac{३}{४}}{७}$ (३०) $\frac{\frac{४}{५} \text{ का } \frac{३}{८}}{९}$ (३१) $\frac{१४}{७ \text{ का } \frac{८}{९}}$ (३२) $\frac{\frac{३}{४} \text{ का } \frac{४}{५} \text{ का } \frac{५}{७}}{२\frac{११}{१४}}$

(३३) $\frac{५\frac{२}{७} + ४\frac{५}{६}}{७\frac{२}{९} + २\frac{१०}{२१}}$ (३४) $\frac{१०\frac{५}{६} - ३\frac{३}{५}}{४\frac{१}{७} - २\frac{११}{१५}}$ (३५) $\frac{३\frac{१}{२} - १}{१५\frac{१}{३} + ५\frac{१}{२} - ३\frac{१}{३}} \div \frac{१ - \frac{३}{४}}{१ + \frac{३}{४}}$

भिन्नसंख्याओं का महत्तमसमापवर्तक

(१२६) दो वा अधिक भिन्न संख्याओं का महत्तमापवर्तक वह भिन्नसंख्या होती है जिसका अंश दी हुई संख्याओं के अंशों का महत्तमापवर्तक होता है और उसका छेद उनके छेदों का लघुतमापवर्त्य होता है । इस लिये दी हुई भिन्नों के अंशों के महत्तमापवर्तक को अंशस्थान में और उनके छेदों के लघुतमापवर्त्य को छेदस्थान में रखने से जो भिन्नसंख्या बनेगी वही दी हुई भिन्नसंख्याओं का महत्तमापवर्तक होगा । यदि दी हुई भिन्नों में कोई संयुक्तभिन्न हो तो उसको विषमभिन्न का रूप दे कर और कोई भिन्न अपने लघुतम रूप में न हो तो उसको लघुतम रूप दे कर तब यह क्रिया करनी चाहिये ।

उदाहरण, $\frac{८}{१५}$, $\frac{२४}{३५}$, $\frac{३२}{४५}$ इनका महत्तमापवर्तक क्या होगा ?

यहां दी हुई भिन्नें अपने लघुतम रूप में ही हैं इस लिये उनको लघुतम रूप देने का प्रयोजन नहीं ।

अब ८, २४, ३२ इन अंशों का महत्तमापवर्तक = ८, और १५, २५, ७५, इन छेदों का लघुतमापवर्त्य = २२५,

अतः $\frac{८}{२२५}$ यह निर्दिष्ट संख्याओं का महत्तमापवर्तक है ।

उदाहरणमाला (१६)

इनका महत्तमापवर्तक निकालो

(१) $\frac{४}{५}$, $\frac{६}{७}$, $\frac{८}{१०}$ (२) $\frac{३}{४}$, $\frac{२१}{३३}$, $\frac{९}{२२}$ (३) $\frac{६}{९}$, $\frac{१२}{२४}$, $\frac{४८}{६३}$ (४) $\frac{५}{६}$, $\frac{१२}{१५}$, $\frac{१७}{२०}$, $\frac{२५}{३०}$ (५) ३$\frac{१}{२}$, ५$\frac{१}{४}$, $\frac{१}{१२}$ (६) ३, $\frac{९}{२}$, १०$\frac{१}{२}$ (७) $\frac{१८}{२५}$, $\frac{१२}{२५}$, $\frac{२४}{३६}$, $\frac{४८}{६०}$, $\frac{६०}{७२}$ (८) $\frac{९}{१२}$, $\frac{१२}{१५}$, $\frac{१५}{१८}$, $\frac{१८}{२१}$ (९) १८$\frac{२}{३}$, १८$\frac{९}{१०}$, १९$\frac{१}{४}$, २२$\frac{१०}{११}$, २५$\frac{११}{१३}$

(१०) एक ढेरी में २७$\frac{१}{२}$ सेर गेहूं, दूसरी ढेरी में २८$\frac{७}{८}$ सेर गेहूं और तीसरी में ३२$\frac{१}{१२}$ से० गेहूं हैं, बताओ बड़ी से बड़ी कितने सेर की टोकरी हो सकती है जिससे तीनों ढेरियां पूरी पूरी नापी जा सकें ?

भिन्नसंख्याओं का लघुतमापवर्त्य

(१२७) दो वा अधिक भिन्नसंख्याओं का लघुतमापवर्त्य वह भिन्नसंख्या होती है जिसका अंश दी हुई भिन्नों के अंशों का लघुतमापवर्त्य और उसका छेद दी हुई भिन्नों के छेदों का महत्तमापवर्तक होता है । इस लिये दी हुई भिन्नों के अंशों के लघुतमापवर्त्य को अंशस्थान में और उनके छेदों के महत्तमापवर्तक को छेदस्थान में रखने से जो भिन्नसंख्या बनेगी वही दी हुई भिन्नों का लघुतमापवर्त्य होगा । यहां संयुक्तभिन्न को विषमभिन्न का रूप दे कर और कोई भिन्नसंख्या अपने लघुतम रूप में न हो तो उसको लघुतम रूप दे कर तब यह क्रिया करनी चाहिये ।

उदाहरण, $\frac{४}{२१}$, $\frac{५}{२८}$, $\frac{६}{४९}$, इनका लघुतमापवर्त्य क्या होगा ?

यहां ४, ५, ६, इन अंशों का लघुतमापवर्त्य = ६० और २१, २८, ४९ इन छेदों का महत्तमापवर्तक = ७ है,

अतः $\frac{६०}{७}$ यह निर्दिष्ट संख्याओं का लघुतमापवर्त्य है ।

उदाहरणमाला (१७)

इनका लघुतमापवर्त्य निकालो

(१) $\frac{८}{२५}$, $\frac{४}{१५}$, $\frac{९}{२०}$ (२) $\frac{२}{७}$, $\frac{४}{२१}$, $\frac{५}{३५}$ (३) $\frac{१२}{१५}$, $\frac{२१}{२४}$, $\frac{२५}{४५}$
(४) $\frac{५}{६}$, $\frac{३६}{४२}$, $\frac{९}{१२}$, $\frac{५}{१८}$ (५) $\frac{७}{११}$, $\frac{३३}{४४}$, $\frac{९}{५५}$, $\frac{२}{३३}$, $\frac{२}{७७}$ (६) $\frac{२}{३}$, $\frac{४}{५}$, $\frac{६}{७}$, $\frac{८}{९}$ (७) १$\frac{५}{२८}$, २$\frac{२}{२१}$, ३$\frac{१}{७}$ (८) $\frac{४}{६}$, $\frac{१५}{१८}$, $\frac{३२}{३६}$, $\frac{७७}{८४}$ (९) १$\frac{३७}{७८}$, ३$\frac{५}{५२}$, २$\frac{५४}{६५}$, ७$\frac{२५}{२६}$, ५$\frac{३५}{३९}$

(१०) एक गोलाई के क्षेत्र की चारो ओर तीन मनुष्यों ने एक ही समय में दौडना शुरू किया, पहिला मनुष्य २$\frac{१}{४}$ मिनिट में, दूसरा ३$\frac{३}{८}$ मि० में और तीसरा ५$\frac{१}{१६}$ मि० में उस गोलाई की चारो ओर दौड जाता है, बताओ पहिली बार वे सब एक ही स्थान पर एक साथ कब मिलेंगे?

कोष्ठों का प्रयोग

(१२८) प्रायः ——, ( ), { }, [ ] इन चार कोष्ठों का ही प्रयोग किया जाता है। इनमें आडी लकीर वाले पहिले कोष्ठ को श्रृङ्खल कहते हैं। और इस आडी रेखा को भिन्नसंख्याओं के अंशों के ऊपर $\overline{\frac{१}{५}+\frac{१}{७}+\frac{१}{३}-\frac{१}{४}}$, इस तरह लिखते हैं। दूसरे कोष्ठ को **लघुकोष्ठ,** तीसरे कोष्ठ को **मध्यमकोष्ठ** और चौथे को **वृहत्कोष्ठ** कहते हैं। इनमें से प्रत्येक कोष्ठ अपने भीतर की सब संख्याओं से बने हुए एक पद को सूचित करता है। इस लिये जिस स्वरूप में कोष्ठ का भी प्रयोग होता है उस स्वरूप को सरल करने में, अर्थात् योग अन्तर आदि की क्रिया से उस स्वरूप को सक्षिप्तरूप देने में, पहिले कोष्ठ के भीतर की सब संख्याओं को सरल करके कोष्ठ को दूर करना चाहिये तब अन्य पदों को सरल करना चाहिये।

(१२९) अब $\frac{१}{४}-\frac{१}{८}+\frac{१}{१६}$ इस स्वरूप का मान निकालने में हम (२५) प्रक्रम के नियम के अनुसार $\frac{१}{४}$ और $\frac{१}{१६}$ इन दो धनपदों के योग में $\frac{१}{८}$ इस ऋण पद को घटाते हैं। तब $\frac{३}{१६}$ यह उक्त स्वरूप का मान आता है। परन्तु यदि $\frac{१}{४}$ में $\frac{१}{८}$ और $\frac{१}{१६}$ इन दो पदों का योग घटाना हमको अभीष्ट हो तो यह उक्त

स्वरूप से प्रकट नहीं हो सकता है। इसको प्रकट करने के लिये हमको कोष्ठ का प्रयोग करना पड़ेगा। और जब हम उक्त स्वरूप को $\frac{१}{४} - (\frac{१}{८} + \frac{१}{१६})$ इस स्वरूप में लिखते हैं तब यह स्पष्ट प्रकाशित होता है कि $\frac{१}{४}$ में $\frac{१}{८}$ और $\frac{१}{१६}$ का योगफल घटाना है। और इस प्रकार क्रिया करने से, अर्थात् पहिले कोष्ठ के भीतर की भिन्नों को सरल करके तब अन्य पदों को सरल करने से, $\frac{१}{१६}$ यह हमारा अभीष्ट उत्तर आता है। यहां $\frac{१}{८}$ यह भिन्न धन समझी जाती है। यदि ऋण समझी जाय तो उसका और $\frac{१}{१६}$ इसका योग न हो सकेगा। अब यदि उक्त तीन भिन्नों का $\frac{१}{१६}$ यही मान हमको अभीष्ट हो तो हम उक्त स्वरूप को विना कोष्ठ की सहायता के $\frac{१}{४} - \frac{१}{८} - \frac{१}{१६}$ ऐसा लिख सकते हैं। जिसका (२५) प्रक्रम से $\frac{१}{१६}$ यही मान होगा। इससे यह नियम निकलता है कि कोष्ठ के बाहर यदि ऋण चिह्न हो तो उस कोष्ठ के भीतर की संख्याओं के धन चिह्न को ऋण चिह्न में और ऋण चिह्न को धन चिह्न में बदल कर हम कोष्ठ को दूर कर सकते हैं। परन्तु कोष्ठ के बाहर यदि धन चिह्न हो तो भीतर की संख्याओं के धन ऋण चिन्ह बदले नहीं जाते हैं। जैसे, $\frac{१}{१६} + (\frac{१}{४} - \frac{१}{८})$ इस स्वरूप के अनुसार पहिले $\frac{१}{४}$ में $\frac{१}{८}$ को घटा कर शेष को $\frac{१}{१६}$ में जोडना चाहिये। जिससे $\frac{३}{१६}$ यह उक्त स्वरूप का मान होता है। यही मान उक्त स्वरूप को कोष्ठ के बिना $\frac{१}{१६} + \frac{१}{४} - \frac{१}{८}$ इस तरह लिखने से भी आता है।

उदाहरण (१) $३\frac{१}{२} - (२\frac{१}{३} + \frac{१}{६})$ इसको संक्षिप्त रूप दो।

दी हुई भिन्न $= ३\frac{१}{२} - (२\frac{१}{३} + \frac{१}{६})$

$= \frac{७}{२} - (\frac{७}{३} + \frac{१}{६})$

$= \frac{७}{२} - (\frac{१४+१}{६})$

$= \frac{७}{२} - \frac{१५}{६}$ कोष्ठ को दूर करने से,

$= \frac{२१-१५}{६}$

$= \frac{६}{६} = १$ उत्तर

ऊपर के उदाहरण में (१२८) प्रक्रम के अनुसार कोष्ठ के भीतर की भिन्नों को पहिले सरल कर के तब कोष्ठ दूर किया गया है। अब (१२९)

प्रक्रम के अनुसार उक्त उदाहरण में कोष्ठ के बाहर ऋण चिह्न होने से कोष्ठ के भीतर की भिन्नों के चिह्न बदल कर पहिले कोष्ठ को दूर किया है। तब उन भिन्न संख्याओं को सरल कर के उक्त उदाहरण का उत्तर नीचे कर के दिखलाया गया है। जैसे,

दी हुई भिन्न $= ३\frac{१}{२} - (२\frac{१}{३} + \frac{१}{६})$

$= \frac{७}{२} - (\frac{७}{३} + \frac{१}{६})$

$= \frac{७}{२} - \frac{७}{३} - \frac{१}{६}$ चिन्हों को बदल कर कोष्ठ दूर करने से,

$= \frac{२१-१४-१}{६}$

$= \frac{२१-१५}{६}$

$= \frac{६}{६} = १$ उत्तर.

(१२०) "कोष्ठ के भीतर की सब संख्याएँ मिल कर एक पद होता है" इस एक ही अर्थ को सूचित करने के लिये चार प्रकार के कोष्ठ कल्पना करने का प्रयोजन यह है कि जब एक ही प्रकार के कोष्ठ का काम होता है तो प्रायः (   ) इसी लघुकोष्ठ को लिखते हैं। और जब एक के बाहर एक ऐसे अनेक कोष्ठों का काम होता है तब कौन कोष्ठ कहां समाप्त भया इसका ज्ञान होने में कठिनता होगी। और भिन्न भिन्न कोष्ठों की कल्पना करने से वह कठिनता नहीं होती है। जैसे,

$५\frac{१}{२} - \left[\frac{१}{३} - \left\{ \frac{१}{६} - \left(\frac{१}{७} - \overline{\frac{१}{२०} + \frac{१}{४०}} \right) \right\} \right]$ इस स्वरूप से यह स्पष्ट मालूम होता है कि $\frac{१}{२०}$ और $\frac{१}{४०}$ इनके योग को $\frac{१}{७}$ में घटा कर जो शेष होगा उस को $\frac{१}{६}$ में घटाना है। फिर यहां जो शेष होगा उसको $\frac{१}{३}$ में घटा कर शेष को $५\frac{१}{२}$ में घटाना है। यदि एक ही प्रकार के यहां सब कोष्ठ हों तो इस अर्थ की प्रतीति उतनी सुगमता से न हो सकेगी। अब इससे यह नियम निकलता है कि यदि चारों प्रकार के कोष्ठों को दूर करना हो तो पहिले सब से छोटे शृङ्खल कोष्ठ को दूर करना चाहिये। उसके बाद उससे बडे लघु कोष्ठ को, तब मध्यम कोष्ठ को और अन्त में बृहत्कोष्ठ को दूर करना चाहिये। इसी क्रम से सब कोष्ठों को दूर करना चाहिये।

उदाहरण (२) $\frac{११}{१६} \div \left[\frac{३}{४} - \left\{ \frac{३}{१६} \div \left(७\frac{१}{२} \times \overline{\frac{१}{३०} + \frac{१}{६०}} \right) \right\} \right]$

इसको सरल करो ।

दी हुई भिन्न $=\frac{११}{१६}\div\left[\frac{३}{४}-\left\{\frac{३}{१६}\div\left(७\frac{१}{२}\times\overline{\frac{१}{३०}+\frac{१}{६०}}\right)\right\}\right]$

$=\frac{११}{१६}\div\left[\frac{३}{४}-\left\{\frac{३}{१६}\div\left(\frac{१५}{२}\times\overline{\frac{२+१}{६०}}\right)\right\}\right]$

$=\frac{११}{१६}\div\left[\frac{३}{४}-\left\{\frac{३}{१६}\div\left(\frac{१५}{२}\times\frac{३}{६०}\right)\right\}\right]$ शृङ्खलकोष्ठ को दूर करने से,

$=\frac{११}{१६}\div\left[\frac{३}{४}-\left\{\frac{३}{१६}\div\frac{३}{८}\right\}\right]$ लघुकोष्ठ को दूर करने से,

$=\frac{११}{१६}\div\left[\frac{३}{४}-\left\{\frac{३}{१६}\times\frac{८}{३}\right\}\right]$

$=\frac{११}{१६}\div\left[\frac{३}{४}-\frac{१}{२}\right]$ मध्यमकोष्ठ को दूर करने से,

$=\frac{११}{१६}\div\left[\frac{३-२}{४}\right]$

$=\frac{११}{१६}\div\frac{१}{४}$ बृहत्कोष्ठ को दूर करने से,

$=\frac{११}{१६}\times\frac{४}{१}$

$=\frac{११}{४}=२\frac{३}{४}$ उत्तर.

नोट—जब किसी कोष्ठ के बाहर ऋण चिन्ह होता है और उस कोष्ठ के भीतर की संख्याओं को सरल करने पर उनका मान ऋण आता है तब उस कोष्ठ को दूर करते समय उस ऋण मान की बांई और ऋण चिन्ह को न लिख कर धन चिह्न लिखना चाहिये । और यदि किसी कोष्ठ के बाहर धन चिह्न हो और उस कोष्ठ के भीतर की संख्याओं को सरल करने पर उनका मान ऋण हो तो उस कोष्ठ को दूर करने में उस ऋण मान के पहिले धन चिह्न न लिख कर ऋण चिह्न ही लिखना चाहिये ।

उदाहरण (३) $१\frac{७}{१२} \div \left\{ \frac{२}{३} - \left(\frac{१}{८} - \frac{१}{४} \right) \right\}$ इसका मान निकालो ।

दिया हुआ स्वरूप $= १\frac{७}{१२} \div \left\{ \frac{२}{३} - \left(\frac{१}{८} - \frac{१}{४} \right) \right\}$

$= \frac{१९}{१२} \div \left\{ \frac{२}{३} - \left(\frac{१-२}{८} \right) \right\}$

$= \frac{१९}{१२} \div \left\{ \frac{२}{३} - \left(-\frac{१}{८} \right) \right\}$

$= \frac{१९}{१२} \div \left\{ \frac{२}{३} + \frac{१}{८} \right\}$ लघुकोष्ठ दूर करने से,

$= \frac{१९}{१२} \div \left\{ \frac{१६+३}{२४} \right\}$

$= \frac{१९}{१२} \div \frac{१९}{२४}$ मध्यमकोष्ठ दूर करने से,

$= \frac{१९}{१२} \times \frac{२४}{१९} = २$ उत्तर.

यहां लघु कोष्ठ के भीतर की $\frac{१}{८}$ और $\frac{१}{४}$ इन भिन्नों में $\frac{१}{८}$ में $\frac{१}{४}$ को घटाने से $-\frac{१}{८}$ यह ऋण अन्तर होता है, परन्तु उस लघु कोष्ठ के बाहर ऋण चिह्न होने से $\frac{१}{८}$ की बांई ओर ऋण चिह्न न लिख कर धन चिह्न लिखा है । और यहां लघु और मध्यम यही दो प्रकार के कोष्ठ हैं इस लिये क्रमानुसार पहिले लघु फिर मध्यम कोष्ठ को दूर किया गया है ।

उदाहरण (४) $११ \div \left\{ १ + \left(\frac{१}{६} + \overline{\frac{१}{४} - \frac{१}{२}} \right) \right\}$ इसको सरल करो ।

दिया हुआ स्वरूप $= ११ \div \left\{ १ + \left(\frac{१}{६} + \overline{\frac{१}{४} - \frac{१}{२}} \right) \right\}$

$= ११ \div \left\{ १ + \left(\frac{१}{६} + \overline{\frac{१-२}{४}} \right) \right\}$

$= ११ \div \left\{ १ + \left(\frac{१}{६} - \frac{१}{४} \right) \right\}$ शृंखलकोष्ठ को दूर करनेसे,

$$= ११ \div \left\{ १ + \left(\frac{२ - ३}{१२} \right) \right\}$$

$$= ११ \div \left\{ १ - \frac{१}{१२} \right\}$$ लघुकोष्ठ को दूर करने से,

$$= ११ \div \left\{ \frac{१२ - १}{१२} \right\}$$

$$= ११ \div \frac{११}{१२}$$ मध्यमकोष्ठ को दूर करने से,

$$= \cancel{११} \times \frac{१२}{\cancel{११}} = १२$$ उत्तर.

यहां शृंखल कोष्ठ के भीतर के $\frac{१}{४}$ में $\frac{१}{२}$ को घटाने से $-\frac{१}{४}$ यह ऋण शेष बचा, इसलिये उस कोष्ठ के बाहर धन चिह्न होने पर भी $\frac{१}{६}$ में $\frac{१}{४}$ को घटाया, तब $-\frac{१}{१२}$ यह ऋण शेष बचा, इस लिये कोष्ठ के बाहर धन चिह्न यहां पर भी होने से १ में $\frac{१}{१२}$ को घटाया है। और यहां क्रम के अनुसार पहिले शृङ्खल कोष्ठ को, तब लघु कोष्ठ को और तब मध्यम कोष्ठ को दूर किया है।

(१ः२) यदि किसी कोष्ठ के पहिले कोई चिह्न न हो तो उस कोष्ठ के पहिले गुणन चिह्न समझ कर तदनुसार क्रिया करनी चाहिये।

उदाहरण (५) $१\frac{७}{९}\left(\frac{१}{२} + \frac{१}{४}\right)\left(\frac{३}{४} - \frac{१}{२}\right)$ इसको संक्षिप्त रूप में लिखो।

दिया हुआ स्वरूप $= १\frac{७}{९}\left(\frac{१}{२} + \frac{१}{४}\right)\left(\frac{३}{४} - \frac{१}{२}\right)$

$$= \frac{१६}{९} \times \left(\frac{२ + १}{४}\right) \times \left(\frac{३ - २}{४}\right)$$

$$= \frac{\overset{४}{\cancel{१६}}}{\underset{३}{\cancel{९}}} \times \frac{\cancel{३}}{\cancel{४}} \times \frac{१}{\cancel{४}}$$

$$= \frac{१}{३}$$ उत्तर.

यहां दोनों लघुकोष्ठों के बीच में और $१\frac{७}{९}$ इसके और पहिले कोष्ठ के बीच में कोई चिह्न न होने से वहां गुणन चिन्ह रख कर उत्तर निकाला गया है।

उदाहरणमाला (१८)

इनको सरल करो

(१) $\frac{१}{२}-\left(\frac{३}{४}-\frac{१}{४}\right)$ (२) $\frac{१}{४}\left(\overline{\frac{५}{६}+\frac{२}{८}}-\frac{१}{३}\right)$

(३) $\left(३+\frac{१}{४}\right)\div\frac{५}{७}\left(\frac{१}{३}-\frac{१}{६}\right)$

(४) $२\frac{१}{२}+\left(\frac{७}{८}-\frac{३}{४}\right)\left(\frac{५}{६}-\frac{१}{६}\right)$

(५) $\frac{७}{८}+\left\{\frac{३}{४}-\left(\frac{१}{२}\text{ का }\frac{२}{३}-\frac{१}{३}\right)\right\}$

(६) $१\frac{२}{३}-\left[७\frac{१}{८}-\left\{१\frac{१}{१०}\left(-३\frac{१}{३}+६\frac{२}{३}+५\right)\right\}\right]$

(७) $९\frac{१}{२}+\left[७\frac{१}{२}-\left\{\frac{१}{४}\div\left(\frac{१}{२}-\frac{१}{४}\right)\right\}\right]$

(८) $७-\left[\frac{३}{४}+\left\{२\frac{१}{२}-\left(\frac{१}{२}\text{ का }\overline{\frac{१}{६}-\frac{१}{७}}\right)\right\}\right]$

(९) $\frac{१}{६}+\left[२\frac{१}{३}\div\left\{\frac{३}{४}-\frac{१}{२}\left(\frac{२}{३}-\frac{१}{८}\right)\right\}\right]$

(१०) $५\frac{१}{२}-\left[३-\frac{१}{८}\left\{७-\frac{१}{३}\left(\frac{३}{४}\text{ का }\frac{८}{९}\right)\right\}\right]$

(११) $६-\left[३-\frac{१}{४}\left\{३\frac{१}{२}-\left(४\div\overline{३-\frac{१}{२}}\right)\right\}\right]$

(१२) $\frac{१२}{४७}\left[५\frac{१}{२}-\left\{\frac{१}{४}+\frac{८}{११}\left(\overline{\frac{१}{२}-\frac{१}{३}}+१\frac{२}{३}\right)\right\}\right]$

(१३) $\left[\frac{९}{१०}\div\left\{\overline{\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{४}{५}}\div२\frac{१}{३}\left(१\frac{१}{७}\div\frac{१}{७}\right)\right\}\right]$

(१४) $\left[\frac{1}{11} \text{ का } 5\frac{1}{2} \left\{ \frac{9}{10} \text{ का } 1\frac{1}{9} \left(\frac{1}{4} \times 2\frac{2}{3} \times 1\frac{1}{2} \right) \right\} \right]$

(१५) $3\frac{11}{23} \times \left[2 - \left\{ \frac{1}{80} + \left(\frac{1}{40} + \overline{\frac{1}{20} - \frac{1}{10}} \right) \right\} \right]$

विततभिन्न वा वर्द्धितभिन्न

(१३२) जिस भागजाति भिन्न संख्या को वितत अर्थात् फैलाना हो वह भागजाति भिन्न यदि समभिन्न हो (अर्थात् उसका अंश छेद से छोटा हो) तो उसके अंश और छेद में अंश का भाग दो । और यदि वह भागजाति भिन्न विषमभिन्न हो तो उसको संयुक्तभिन्न का रूप देने से उसमें जो भिन्न अवयव बनेगा उसके अंश और छेद में अंश का भाग दो । तब दोनों प्रकार की संख्याओं के अंशस्थान में १ होगा और छेदस्थान में विषमभिन्न होगी । फिर उस विषमभिन्न को संयुक्तभिन्न का रूप दो और उस संयुक्तभिन्न की भिन्नसंख्या के अंश और छेद में पुनः अंश का भाग दो । ऐसा तब तक करो जब तक छेदस्थान में कोई अभिन्न संख्या आजाय । तब जो उद्दिष्ट भिन्न संख्या का फैला हुआ रूप होगा उसको **विततभिन्न** कहते हैं । यहां संयुक्तभिन्न के अभिन्न भाग और भिन्न भाग के बीच में धन चिन्ह को लिखते हैं । यह विषय नीचे के उदाहरण से स्पष्ट होगा ।

उदाहरण (१) $\frac{11}{14}$ इसको विततभिन्न का रूपदो ।

यहां $\frac{11}{14} = \frac{1}{\frac{14}{11}} = \frac{1}{1+\frac{3}{11}} = \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{11}{3}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{2}{3}}} =$

$\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{3}{2}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$, यह $\frac{11}{14}$ का वितत रूप है । इसको विततभिन्न कहते हैं । यहां $1+\frac{1}{2}$ यह अन्तिम संयुक्तभिन्न है । इसका भिन्न भाग $\frac{1}{2}$ इसके अंश और छेद में १ इस अंश का भाग दें तो $\frac{1}{\frac{2}{1}}$ ऐसा रूप होगा जो $\frac{1}{2}$ इसी के बराबर होता है । इसलिये यहां छेदस्थान में २ इस अभिन्न संख्या के आने से यहीं पर क्रिया समाप्त करनी चाहिये ।

उदाहरण (२) $\frac{१९}{१२}$ इसको विततभिन्न का रूप दो ।

यहां $\frac{१९}{१२} = १ + \frac{७}{१२} = १ + \frac{१}{\frac{१२}{७}} = १ + \frac{१}{१ + \frac{५}{७}} = १ + \frac{१}{१ + \frac{१}{\frac{७}{५}}} =$

$$१ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{१ + \frac{२}{५}}} = १ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{\frac{५}{२}}}} = १ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{२ + \frac{१}{२}}}}$$

यही $\frac{१९}{१२}$ का वितत रूप है । इसके आगे क्रिया करने से छेदस्थान में २ यही अभिन्न संख्या आवेगी । पहिले उदाहरण में समभिन्न का विततरूप और दूसरे उदाहरण में विषमभिन्न का विततरूप बनाया गया है ।

विततभिन्न को उसके मूल भागजाति भिन्न के संक्षिप्त रूप में लाने का प्रकार

(१३३) किसी विततभिन्न को उसके मूल भागजाति भिन्न का संक्षिप्त रूप देने में क्रिया को अन्त से ही प्रारंभ करना चाहिये । इसके उदाहरण के लिये इसके पहिले के दूसरे उदाहरण में $\frac{१९}{१२}$ इस विषमभिन्न का जो वितत रूप दिखलाया गया है उसी वितत रूप को संक्षिप्त रूप देकर $\frac{१९}{१२}$ इस मूल विषमभिन्न में उसको परिवर्तित कर नीचे दिखलाया जाता है ।

उदाहरण (३) $१ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{२ + \frac{१}{२}}}}$ इसको संक्षिप्त रूप दो ।

दी हुई भिन्न $= १ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{२ + \frac{१}{२}}}} = १ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{\frac{५}{२}}}}$

$$= १ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{१ + \frac{२}{५}}} = १ + \cfrac{१}{१ + \cfrac{१}{\frac{७}{५}}}$$

$$= १ + \cfrac{१}{१ + \frac{५}{७}} = १ + \frac{१}{\frac{१२}{७}} = १ + \frac{७}{१२} = \frac{१९}{१२} \text{ उत्तर.}$$

यहां अन्तिम संयुक्त भिन्न $२+\frac{१}{२}$ यह है, इसका विषमभिन्न का रूप $\frac{५}{२}$ यह है, इसका ऊपर के १ में भाग देने से $\frac{२}{५}$ यह हुआ, अब $१+\frac{२}{५}$ यह दूसरा

संयुक्तभिन्न का रूप है, उसका विषमभिन्न का रूप $\frac{७}{५}$ यह है, इसका ऊपर के १ में भाग देने से $\frac{५}{७}$ यह हुआ, अब $१+\frac{५}{७}$ यह तीसरा संयुक्तभिन्न का रूप है, उसका विषमभिन्न का रूप $\frac{१२}{७}$ यह है, इसका ऊपर के १ में भाग देने से $\frac{७}{१२}$ हुआ, अब चौथा और अन्तिम संयुक्तभिन्न $१+\frac{७}{१२}$ यह है इसको विषमभिन्न का रूप देने से $\frac{१९}{१२}$ यह मूल विषमभिन्न हुई जिसका वर्धित रूप उदाहरण में दिया गया है।

अथवा ऊपर के उदाहरण का उत्तर हम इस तरह भी ला सकते हैं। जैसे,

$$१+\cfrac{१}{१+\cfrac{१}{१+\cfrac{१}{२+\cfrac{१}{२}}}} = १+१\div\left[१+१\div\left\{१+१\div\left(२+\frac{१}{२}\right)\right\}\right]$$

$$=१+१\div\left[१+१\div\left\{१+१\div\frac{५}{२}\right\}\right]$$

$$=१+१\div\left[१+१\div\left\{१+१\times\frac{२}{५}\right\}\right]$$

$$=१+१\div\left[१+१\div\left\{१+\frac{२}{५}\right\}\right]$$

$$=१+१\div\left[१+१\div\frac{७}{५}\right]$$

$$=१+१\div\left[१+१\times\frac{५}{७}\right]$$

$$=१+१\div\left[१+\frac{५}{७}\right]$$

$$=१+१\div\frac{१२}{७}=१+१\times\frac{७}{१२}=१+\frac{७}{१२}=\frac{१९}{१२}\text{ उत्तर,}$$

उदाहरणमाला (१६)

इनको संक्षिप्त रूप दो

(१) $\cfrac{१}{२+\cfrac{३}{४}}$ (२) $\cfrac{१}{२+\cfrac{१}{३+\cfrac{१}{४}}}$ (३) $\cfrac{२३}{३-\cfrac{३}{५-\cfrac{५}{७}}}$

(४) $\cfrac{४४}{११+\cfrac{१}{७+\cfrac{३}{८\frac{१}{४}}}}$ (५) $१+\cfrac{३}{१+\cfrac{३}{१+\cfrac{१}{२}}}$

(६) $१ - \cfrac{२}{८ - \cfrac{७}{१ + \cfrac{१}{२ + \frac{१}{९}}}}$ (७) $\frac{१}{३} + \cfrac{२}{\frac{१}{३} + \cfrac{३}{\frac{१}{४} + \frac{४}{५}}}$

(८) $\frac{१}{४} \div \cfrac{२}{\frac{१}{२} + \cfrac{३}{४ + \cfrac{५}{\frac{१}{२} + \frac{३}{२}}}}$

(९) $\cfrac{१}{२ - \cfrac{३}{४ - \frac{५}{६}}} \times \cfrac{१}{२ + \cfrac{३}{४ + \frac{५}{६}}} \div ५\frac{४}{५}$

(१०) $\left\{ \cfrac{२}{३ - \cfrac{१}{१ - \frac{१}{२}}} - \frac{१}{३}\left(५ - \cfrac{२}{\frac{३}{२} - \frac{१}{६}}\right) \right\} \div \cfrac{\frac{१}{२} + \frac{१}{४}}{१\frac{१}{२}}$

(११) $१ + \cfrac{१}{३ + \cfrac{१}{२ + \cfrac{१}{४ + \cfrac{१}{१ + \frac{१}{५}}}}}$

(१२) $\cfrac{७}{१ + \cfrac{६}{१ + \cfrac{५}{१ + \cfrac{४}{१ + \cfrac{३}{१ + \cfrac{२}{१ + \frac{१}{२}}}}}}}$

भिन्नसंख्याओं को सरल करने का नियम

(१३५) जब किसी उदाहरण में धन, ऋण, गुणन और भाग इनके चिन्हों से युक्त कई भागजाति भिन्नसंख्याएँ केवल होती हैं और प्रभागजाति भिन्न के भाग के भाग भी केवल भागजाति भिन्न में होते हैं तब उन सब को सरल करने में पहिले प्रभागजाति भिन्न को सरल करो, अर्थात् "का" की क्रिया पहिले करो, तब भाग की क्रिया करो, तब गुणन की क्रिया करो और अन्त में योग अन्तर की क्रिया करो।

उदाहरण (१) $\frac{३}{४}$ का $\frac{१२}{१५} \div \frac{२}{५} \times \frac{१}{३} + \frac{१}{४} \times \frac{१}{८} \div १\frac{१}{६}$ का $\frac{२}{३} - \frac{१}{२}$ इसको सरल करो।

यहां दिया हुआ स्वरूप $= \frac{3}{4}$ का $\frac{1\cdot 2}{1\cdot 5} \div \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \div \frac{1}{32}$ का $\frac{4}{3} - \frac{1}{9}$

$= \frac{3}{5} \div \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \div \frac{1}{24} - \frac{1}{9}$ "का" की क्रिया करने से,

$= \frac{3}{5} \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} \times \frac{24}{1} - \frac{1}{9}$ भाग की क्रिया करने से,

$= \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{9}$ गुणा की क्रिया करने से,

$= \frac{27+27-4}{36} = \frac{50}{36} = \frac{25}{18} = 1\frac{7}{18}$ उत्तर.

जब किसी उदाहरण में कोष्ठ होते हैं और धन ऋण आदि चिह्नों से युक्त कई प्रकार की भिन्नें होती हैं तब उनको सरल करने में नीचे उत्तर करके दिखलाया हुआ उदाहरण बहुत उपयोगी है।

उदाहरण (२) $\frac{2\frac{1}{4}}{2\frac{2}{3}} + \frac{2\frac{1}{2} + 5\frac{1}{5}}{3\frac{1}{3} + 9\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}$ का $\frac{3}{20} +$

$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}}} \div \left(2\frac{1}{5} - 1\frac{2}{3} \right)$ इसको सरल करो।

यहां $\frac{2\frac{1}{4}}{2\frac{2}{3}} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{8}{3}} = \frac{9}{4} \div \frac{8}{3} = \frac{9}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{27}{32}$,

और $\frac{2\frac{1}{2} + 5\frac{1}{5}}{3\frac{1}{3} + 9\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{26}{5}}{\frac{10}{3} + \frac{19}{2}} = \frac{\frac{25+52}{10}}{\frac{20+57}{6}} = \frac{\frac{77}{10}}{\frac{77}{6}} =$

$\frac{77}{10} \div \frac{77}{6} = \frac{77}{10} \times \frac{6}{77} = \frac{3}{5}$,

और $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{8}{7}}} = \frac{1}{1 + \frac{7}{8}} = \frac{1}{\frac{15}{8}} = \frac{8}{15}$,

और $\left(2\frac{1}{5} - 1\frac{2}{3} \right) = \left(2 - 1 + \frac{1}{5} - \frac{2}{3} \right) = \left(1 + \frac{3-10}{15} \right) =$
$\left(1 - \frac{7}{15} \right) = \left(\frac{15-7}{15} \right) = \frac{8}{15}$,

अतः दिया

हुआ स्वरूप $= \frac{२७}{३२} + \frac{३}{५} + \frac{१}{२} + \frac{३}{८}$ का $\frac{३}{२०} + \frac{८}{१५} \div \frac{८}{१५}$

$= \frac{२७}{३२} + \frac{३}{५} + \frac{१}{२} + \frac{९}{१६०} + \frac{८}{१५} \div \frac{८}{१५}$ "का" की क्रिया करने से,

$= \frac{२७}{३२} + \frac{३}{५} + \frac{१}{२} + \frac{९}{१६०} + \frac{८}{१५} \times \frac{१५}{८}$ भाग की क्रिया करने से,

$= \frac{२७}{३२} + \frac{३}{५} + \frac{१}{२} + \frac{९}{१६०} + १$ गुणा की क्रिया करने से,

$= १ + \frac{१३५ + ९६ + ८० + ९}{१६०}$

$= १ + \frac{३२०}{१६०} = १ + २ = ३$ उत्तर.

यहां पहिले संयुक्तभिन्न को विषमभिन्न में और मिश्रभिन्न को, अर्थात् जिसके अंश और छेद दोनों की वा दो में से किसी एक की भिन्नसंख्या होती है, उस मिश्रभिन्न को सरल किया है, तब विततभिन्न को और फिर कोष्ठ को सरल कर के सब भिन्नों को भागजाति भिन्न में परिवर्तित किया है। फिर (१३४) प्रक्रम के अनुसार पहिले "का" की क्रिया, तब भाग की, तब गुणा की और अन्त में योग अन्तर की क्रिया कर के उक्त स्वरूप को सरल किया है। इसी तरह किसी दिये हुए स्वरूप को सरल करना चाहिये।

उदाहरणमाला (२०)

इनका मान निकालो

(१) $\dfrac{\frac{२}{६} \text{ का } \frac{६}{७} \div \frac{१}{७}}{\frac{१}{६} \div \frac{१}{८} \text{ का } \frac{३}{८}}$ (२) $\dfrac{२\frac{१}{२} - १\frac{७}{८}}{३\frac{१}{४} \text{ का } २\frac{१}{२}} \div \frac{१}{३} \text{ का } \frac{५}{६}$

(३) $\dfrac{\frac{१५३}{१८७} + \frac{९१}{५१७}}{\frac{५}{८} + \frac{३}{११}} - \dfrac{१३३}{१७१}$ (४) $\dfrac{\frac{३}{४}}{\frac{५}{४}} + \dfrac{२\frac{१}{४} - \frac{३}{७}}{५\frac{१}{४} + \frac{१}{१४}} - \dfrac{२}{३\frac{४}{७}}$

(५) $\frac{५}{७} \text{ का } \frac{१}{२} + \dfrac{\frac{६}{७} - \frac{२}{३} \text{ का } \frac{३}{१४}}{\frac{२}{३} + १\frac{१}{६} \text{ का } \frac{३}{१४}}$ (६) $\dfrac{२\frac{१}{४} \text{ का } \frac{१}{३}}{\frac{५}{६} - \frac{१}{३}} + \dfrac{\frac{५}{८} - \frac{१}{२} \text{ का } \frac{३}{८}}{२\frac{१}{२} \text{ का } \frac{३}{४}}$

(७) $\frac{५}{८} \text{ का } \dfrac{\frac{१}{७} + \frac{१}{८}}{\frac{१}{७} \text{ का } \frac{१}{८}} \div \dfrac{२\frac{१}{३}}{७ + \frac{१}{२}}$ (८) $६\frac{२}{३} + \frac{१}{५} \text{ का } \dfrac{६\frac{२}{३} \text{ का } \frac{३}{८}}{५\frac{२}{७} \text{ का } ७\frac{१}{४}}$

(९) $\dfrac{\frac{१}{२}+\frac{३}{४}+\frac{५}{६}}{\frac{२}{३}+\frac{१}{२}+१\frac{१}{६}}$ का $\dfrac{२\frac{१}{३}}{\frac{७}{९}}$ (१०) $\dfrac{५\frac{१}{१६}+७\frac{११}{१६}}{९\frac{१}{३}-८\frac{१}{३}} \div \dfrac{३\frac{३}{४} \text{ का } ४\frac{२}{३}}{२\frac{१}{२}-१\frac{१}{३}}$

(११) $\dfrac{२\frac{१}{२}-\frac{३}{१४} \text{ का } ५\frac{१}{२} \div १६\frac{१}{२}}{१६\frac{१}{३} \div ५\frac{१}{२}-\frac{३}{१४} \text{ का } २\frac{१}{३}}$

(१२) $\dfrac{८\frac{३}{५}-७\frac{३}{४}+५\frac{२}{३}-४\frac{१}{२}}{१३-११\frac{९}{११}+१०\frac{७}{९}-९\frac{१७}{२०}} \times \frac{२}{११}$ का ३६

(१३) $\dfrac{४\frac{१}{४}-३\frac{१}{३}}{४\frac{१}{४} \times ३\frac{१}{३}}+\dfrac{५\frac{१}{५}-४\frac{१}{४}}{५\frac{१}{५} \times ४\frac{१}{४}}+\dfrac{५\frac{१}{५}-३\frac{१}{३}}{३\frac{१}{३} \times ५\frac{१}{५}}$

(१४) $\dfrac{३\frac{१}{३}-१\frac{१}{२} \text{ का } १\frac{१}{५}-१\frac{१}{७}}{(३\frac{१}{३}-१\frac{१}{२}) \text{ का } (१\frac{१}{५}-१\frac{१}{७})} \times \dfrac{३\frac{१}{३}-१\frac{१}{२} \text{ का } (१\frac{१}{५}-१\frac{१}{७})}{(३\frac{१}{३}-१\frac{१}{२}) \text{ का } १\frac{१}{५}-१\frac{१}{७}}$

(१५) $\left\{\dfrac{\frac{१}{२}+\frac{१}{३}}{\frac{१}{२}-\frac{१}{३}}+\dfrac{\frac{१}{३}+\frac{१}{४}}{\frac{१}{३}-\frac{१}{४}}\right\} \div \left\{\dfrac{\frac{१}{७}+\frac{१}{९}}{\frac{१}{७}-\frac{१}{९}}-\dfrac{\frac{१}{५}+\frac{१}{७}}{\frac{१}{५}-\frac{१}{७}}\right\}$

(१६) $७\frac{१}{३}+\dfrac{१२\frac{१}{३}-७\frac{३}{४}}{\frac{५}{६} \times ५\frac{१}{२}}-\dfrac{३\frac{१}{१७}+३\frac{१}{४}}{६\frac{२}{३}-५\frac{१}{५१}}$

(१७) $\dfrac{६\frac{१}{४} \text{ का } ४\frac{१}{३}}{१\frac{५}{६}-१\frac{१}{९}}-\dfrac{१३\frac{४}{७}+५}{८\frac{१}{१४}+२\frac{२}{७}} \times \dfrac{\frac{५}{६}-\frac{१}{७}}{३\frac{३}{७} \text{ का } २\frac{१}{१२}}$

(१८) $\dfrac{९४\frac{१}{३}}{\frac{१}{४}+२३\frac{१}{३}}-\left(\dfrac{३\frac{१}{२}-२\frac{१}{३}}{४\frac{१}{३}-३\frac{१}{२}}-\frac{१}{५}\right)+\dfrac{२\frac{१}{९}-१\frac{११}{१८}}{३\frac{१}{९}-२\frac{५}{९}}$

(१९) $\dfrac{१२\left(७\frac{१}{३}+\frac{१}{९}-५\frac{१}{६}\right)}{\dfrac{२\frac{१}{२}+३\frac{४}{५}+\frac{१}{५}}{\frac{१}{२} \times \frac{१}{५}}}$ का $\dfrac{६\frac{१}{४}+\frac{५}{१२}-\frac{१}{६}}{\frac{३}{४} \div १\frac{१}{३}+११\frac{७}{१६}}$

(२०) $\dfrac{३\frac{३}{७}}{१\frac{२}{७} \text{ का } \frac{२}{९}}+\dfrac{८\frac{१}{४}+२\frac{१}{३}-९\frac{५}{१२}}{२५\frac{११}{१२}+३\frac{३}{४}-२७\frac{१}{३}}-\dfrac{९\frac{३}{४} \text{ का } १\frac{३}{१३}}{४\left(\frac{१}{२}+१\frac{१}{४}\right)}$ का $१\frac{२}{३}$

(२१) $$\frac{७ - २९ \div \left[५ + ३ \div \left\{ २ + १ \div \left(४ - \frac{२}{३} \right) \right\} \right]}{\frac{२}{१२}\frac{१}{२} \left(४\frac{१}{८} \text{ का } ६\frac{२}{७} + \frac{३}{१४} \right) \div \left\{ ४\frac{१}{८} \text{ का } \left(६\frac{२}{७} + \frac{३}{१४} \right) \right\}}$$

भिन्नसंख्याओं का रूपभेद

(१३५) जिस प्रकार हम किसी बडे परिमाण को सवर्णन क्रिया से छोटे परिमाण में परिवर्तित कर सकते हैं और छोटे परिमाण को विवर्णन क्रिया से बड़े परिमाण में परिवर्तित कर सकते हैं उसी तरह किसी बड़े परिमाण के भिन्न को छोटे परिमाण का रूप और छोटे परिमाण के भिन्न को बड़े परिमाण का रूप दे सकते हैं।

(१) प्रकार— कसी बड़े परिमाण के भिन्न को छोटे परिमाण का रूप देने के लिये उस बड़े परिमाण में अभीष्ट छोटे परिमाणों की जो संख्या होगी उससे उस बड़े परिमाण के भिन्न को गुण कर जो गुणनफल होगा वह उस छोटे परिमाण की जाति का होगा।

उदाहरण (१) १ रुपये के $\frac{३}{८}$ इनको आने का रूप दो।

यहां १ रु० = १६ आ० $\therefore \frac{३}{८} \times १६ = ६ \therefore$ ६ आ० उत्तर.

अर्थात् १६ आ० के $\frac{३}{८}$ का मान ६ आ० होता है। यहां १६ आ० के $\frac{३}{८}$ का मान हम दो प्रकार से लाते हैं:—१६ आ० को ३ से गुण कर गुणनफल में ८ का भाग देने से अथवा १६ आ० में ८ का भाग दे कर लब्धि को ३ से गुणने पर ६ आ० यह मान लाते हैं। इसी तरह किसी मिश्रसंख्या के भिन्न का मान लाने में हम उस भिन्न के अंश से उस मिश्रसंख्या को गुण कर गुणनफल में उस भिन्न के छेद का भाग देते हैं। अथवा उस भिन्न के छेद का उस मिश्रसंख्या में भाग दे कर लब्धि को उस भिन्न के अंश से गुण देते हैं।

उदाहरण (२) ५ रु० २ आ० ४ पा० के $\frac{३}{४}$ का क्या मान है?

पहिले प्रकार से,	रु०	आ०	पा०	
	५	२	४	
			× ३	
४)	१५	७	०	= ५रु० २आ० ४पा० का ३ गुना,
	३	१३	९	,, ,, ,, ,, $\frac{३}{४}$, उत्तर

अथवा दूसरे प्रकार से रु० आ० पा०

४) ५ २ ४

१ ४ ७ = ५ रु० २ आ० ४ पा० का $\frac{१}{४}$,

× ३

---

३ १३ ९ = ,, ,, ,, ,, $\frac{३}{४}$, उत्तर

यहां तिगुने ५ रु० २ आ० ४ पा० के ४ समान भाग कर के उनमें से १ भाग का मान ३ रु० १३ आ० ९ पा० यह जो होता है वही मान ५ रु० २ आ० ४ पा० के ४ समान भाग कर के उनमें से ३ भागों का होता है। इससे (१०६) प्रक्रम का नियम सिद्ध होता है।

अथवा $\frac{३}{४}$ = १ − $\frac{१}{४}$ इस पर से भी हम उक्त मान लाते हैं। जैसे,

रु० आ० पा०

४) ५ २ ४ = ५ रु० २ आ० ४ पा० एक गुणित,

− १ ४ ७ = ,, ,, ,, का $\frac{१}{४}$,

---

३ १३ ९ = ,, ,, ,, ,, $\frac{३}{४}$, उत्तर

यहां एक गुणित ५ रु० २ आ० ४ पा० में उसके $\frac{१}{४}$ का मान घटाने से वही पूर्वोक्त मान आता है।

उदाहरणमाला (२१)

नीचे दिये हुए परिमाणों का छोटे परिमाणों में मान निकालो

(१) ४ रु० के $\frac{३}{१६}$ का (२) १३ गिनी के $\frac{४}{७}$ का (३) ३ तोले के $\frac{५}{३२}$ का (४) $\frac{१३}{५४}$ दिन का (५) $\frac{३}{२}$ प्रहर का (६) $\frac{१९}{२०}$ घण्टे का (७) $\frac{७}{३२०}$ एकर का (८) $\frac{३}{४}$ रूड का (९) $\frac{५}{६}$ पौंड (स्टर्लिङ्ग) का (१०) $\frac{५}{४४८}$ टन का (११) $\frac{३}{८}$ मन का (१२) $\frac{१५}{३६४}$ मील का (१३) $\frac{२}{९}$ हाथ का

इनका मान निकालो

(१४) २८ रु० १४ आ० ६ पा० के $\frac{३}{५}$ का

(१५) ३५ रु० १२ आ० ६ पा० के $\frac{७}{१०}$ का

(१६) ७२ रु० ३ आ० ३ पैसे के $\frac{२}{३३}$ का

(१७) ९७ पौं० १० शि० ३ पे० के $\frac{७}{३९}$ का

(१८) २९ पौं० ६ शि० १ पे० के $\frac{३९}{५३}$ का

(१९) १० मन १३ सेर ८ छ० के $\frac{७}{८}$ का

(२०) ९२ वर्ष ३५७ दिन १५ घण्टे ४० मिंनट के $\frac{६}{७}$ का

(२१) ९५ गज १ फ़ु० ८ इ० के $\frac{१५}{३२}$ का

(२२) ९६ तो० ८ मा० ५ र० के $\frac{१४}{१५}$ का

(२३) ४ आने में कितने आने मिलाये जांय जिससे उनका योग १२ रु० के $\frac{१}{३६}$ के बराबर हो ?

(२४) एक मनुष्य की वार्षिक आमदनी ३५०० रु० है, यदि उस आमदनी का $\frac{६}{७}$ सालाना खर्च में और $\frac{३}{२८}$ टैक्स देने में खर्च हो तो उसके पास कितना बचेगा ?

(२५) एक गाडी ६३ मील १ फर्लांङ्ग १५५ गज दूर जाने में दो बार विश्राम करती है, पहिली बार उस दूरी के $\frac{३}{५}$ पर और दूसरी बार $\frac{४}{१५}$ पर विश्राम करती है तो बताओ उस गाडी को अब और कितनी दूर जाना है ?

(२) **प्रकार**—छोटे परिमाण की संख्या को बड़े परिमाण का रूप देना हो तो अभीष्ट बड़े परिमाण के तुल्य छोटे परिमाणों की जो संख्या होगी उसका उस छोटे परिमाण की संख्या में भाग देने से वह छोटे परिमाण की संख्या बड़े परिमाण में परिवर्तित होगी ।

उदाहरण (१) $२\frac{६}{१३}$ रत्ती को तोले का रूप दो ।

यहां ९६ रत्ती = १ तोला और $२\frac{६}{१३} = \frac{३२}{१३}$,

$\therefore \frac{३२}{१३} \div ९६ = \frac{३२}{१३} \times \frac{१}{९६} = \frac{१}{३९}$ तोला, उत्तर,

ऊपर के उदाहरण के प्रश्न को हम इस तरह भी पूंछ सकते हैं कि $२\frac{६}{१३}$ रत्ती को तोले के भिन्न में लाओ । और किसी संख्या को दूसरी संख्या के भिन्न में परिवर्तित करना हो तो पहिली संख्या को अंशस्थान में और दूसरी संख्या को छेदस्थान में रखना चाहिये । यह विषय तुमको पहिले मालूम हो चुका है । अतः ऐसे उदाहरणों को इसी नियम से करना चाहिये ।

उदाहरण (२) $२\frac{१}{३}$ को $३\frac{१}{४}$ के भिन्न का रूप दो ।

यहां अभीष्ट भिन्न $= \frac{२\frac{१}{३}}{३\frac{१}{४}} = \frac{\frac{७}{३}}{\frac{१३}{४}} = \frac{७}{३} \div \frac{१३}{४} = \frac{७}{३} \times \frac{४}{१३} = \frac{२८}{३९}$ उत्तर,

उदाहरण (३) ९० रु० २७० रु० को कौन सी भिन्न है ?

यहां २७० रु० की अभीष्ट भिन्न = ९० रु०, और "का" का अर्थ गुणन करना होने से, २७० रु० × अभीष्ट भिन्न = ९० रु०, और गुणनफल में गुण्य का भाग देने से गुणक और गुणक का भाग देने से गुण्य मालूम होता है इस नियम से,

$$\text{अभीष्ट भिन्न} = \frac{\text{९० रु०}}{\text{२७० रु०}} = \frac{1}{3}, \text{ उत्तर,}$$

यहां २७० रु० की तिहाई ९० रु० होते हैं। अर्थात् ९० रु० २७० रु० का $\frac{1}{3}$ भाग है। अब यदि ऐसा प्रश्न हो कि, ९० रु० कितने रुपये का $\frac{1}{3}$ होता है। तब पूर्व युक्ति से, अभीष्ट रुपये × $\frac{1}{3}$ = ९० रु०,

$\therefore$ अभीष्ट रुपये = ९० ÷ $\frac{1}{3} = \frac{90 \times 3}{1}$ = २७० रु०,

जब किसी मिश्रसंख्या को दूसरी मिश्रसंख्या के भिन्न में लाना हो तो पूर्व नियम से पहिली मिश्रसंख्या को अंशस्थान में और दूसरी मिश्रसंख्या को छेदस्थान में रख कर अंश और छेद दोनों को एक जाति में परिवर्तित करना चाहिये।

उदाहरण (४) १ रु० १२ आ० को २ रु० की भिन्न में लिखो।

यहां १ रु० १२ आ० = १ रु० + $\frac{3}{4}$ रु० = १$\frac{3}{4}$ रु० = $\frac{7}{4}$ रु०

$\therefore$ अभीष्ट भिन्न $= \frac{\frac{7}{4}\text{ रु०}}{\text{२ रु०}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{2}{1}} = \frac{7}{4} \div \frac{2}{1} = \frac{7}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$, उत्तर

अथवा, १ रु० १२ आ० = १६ आ० + १२ आ० = २८ आ०,

$\therefore$ अभीष्ट भिन्न $= \frac{\text{२८ आ०}}{\text{३२ आ०}} = \frac{7}{8}$, उत्तर,

उदाहरण (५) २ फूट ९ इञ्च, ४ यार्ड २ फूट ६ इञ्च की कौनसी भिन्न है!

यहां अभीष्ट भिन्न $= \frac{\text{२ फू० ९ इ०}}{\text{४ या० २ फू० ६ इ०}}$, और अंश और छेद दोनों को यार्डजाति में परिणत करना है, तब पहिले २ फू० ९ इञ्च के यार्ड बनाये, ९ इञ्च को १२ से भागा, तब $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ यह फूट भये, इसमें २ फू० को जोडा, तब २ फू० + $\frac{3}{4}$ फू० = $\frac{11}{4}$ फू०, इसको ३ से भागा तब, $\frac{11}{4 \times 3} = \frac{11}{12}$ यह यार्ड भये।

अब ४ या० २ फू० ६ इ० के यार्ड बनाये, तब ६ इ० = $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ फू० इसमें २ फू० को जोडा तब २ फू० + $\frac{1}{2}$ फू० = $\frac{5}{2}$ फू० इसको ३ से भागा तब $\frac{5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$ यह यार्डभये, इसमें ४ या० को जोडा, तब ४ या० + $\frac{5}{6}$ या० = $\frac{29}{6}$ या०

अब अभीष्ट भिन्न $= \dfrac{२ \text{ फ़ू० } ९ \text{ इ०}}{४ \text{ या० } २ \text{ फ़ू० } ६ \text{ इ०}} = \dfrac{\frac{११}{१२} \text{ या०}}{\frac{२९}{६} \text{ या०}} = \dfrac{११}{१२} \div \dfrac{२९}{६} =$

$\dfrac{११}{१२} \times \dfrac{६}{२९} = \dfrac{११}{५८}$, उत्तर,

अथवा २ फ़ू० ९ इ० = ३३ इ०, और ४ या० २ फ़ू० ६ इ० = १७४ इ०,

$\therefore$ अभीष्ट भिन्न $= \dfrac{२ \text{ फ़ू० } ९ \text{ इ०}}{४ \text{ या० } २ \text{ फ़ू० } ६ \text{ इ०}} = \dfrac{३३ \text{ इ०}}{१७४ \text{ इ०}} = \dfrac{११}{५८}$, उत्तर,

यहां अंश और छेद दोनों को फ़ूट की जाति में परिवर्तित करने से भी वही उत्तर आवेगा ?

उदाहरणमाला (२२)

नीचे दिये हुए छोटे परिमाणों को सबसे बड़े परिमाण का रूप दो

(१) ८ पाई (२) १$\frac{३}{४}$ शिलिंग (३) ६ रत्ती (४) २७ सेकण्ड (५) १० घटी (६) ४८० फ़ूट (७) ५ आ० ४ पा० (८) १३ शिलिंग ४ पेन्स (९) ४ मन १२ सेर (१०) ३ माशा ४ रत्ती ।

(११) ७ रु० ५ आ० ४ पा० को १ रु० की भिन्न में लाओ ।

(१२) ३ पौं० ६ शि० ८ पे० को १ पौं० की भिन्न में लाओ ।

(१३) $\frac{३}{४}$ यह $\frac{५}{६}$ का कौन भाग है ?

(१४) ७$\frac{३}{४}$ यह ५०$\frac{१}{२}$ की कौन सी भिन्न है ?

(१५) १ शि० ८ पे० यह ११ शि० ४ पे० की कौन सी भिन्न है ?

(१६) २ रु० ८ आ० यह ४१ रु० ६ आ० ८ पा० की कौन सी भिन्न है ?

(१७) १ मन ३८ सेर यह ७ सेर ५ छटांक का कौन सा भाग है ?

(१८) ३ फ़ू० ३ इं० को ४३ यार्ड १ फ़ूट की भिन्न में लिखो ।

(१९) ५ रु० ८ आ० के $\frac{१}{३}$ को ७ रु० ९ आ० के $\frac{१}{३}$ की भिन्न में परिवर्तित करो।

(२०) १७ पौं० ८ शि० के $\dfrac{९\frac{१}{२} \text{ का } \frac{५}{१९}}{७\frac{१}{२} \div १\frac{७}{८}}$ को ३४ पौं० १६ शि० की भिन्न में लिखो ।

(२१) ५ रुपये के $\dfrac{८\frac{१}{२} + ७\frac{१}{४}}{६\frac{५}{७} \times \frac{३}{४}\frac{५}{६}}$ को १० रु० के $\dfrac{७\frac{१}{३} \div १४\frac{२}{३}}{\frac{१}{४} + \frac{१}{८}}$ की भिन्न में लिखो।

(२२) $\frac{\text{११ रु० ९ आ० ११ पा०}}{\text{२३ रु० ३ आ० १० पा०}}$ इसको संक्षिप्त रूप में लिखो ।

(२३) $\frac{\text{५५ पौं० ६ शि० ८ पे०}}{\text{२० पौं० १३ शि० ४ पे०}}$ इसका संक्षिप्त रूप लिखो ।

(२४) $\frac{\text{३ यार्ड २ फी० ८ इ०}}{\text{५ यार्ड २ फी० ४ इ०}}$ इसका संक्षिप्त रूप क्या होगा ?

(२५) $\frac{\text{७ यार्ड २ फी० ३ इ०}}{\text{१२ यार्ड २ फीट ९ इ०}}$ इसको संक्षिप्त रूप दो ।

भिन्न के सम्बन्ध के कुछ प्रश्न

उदाहरण (१) एक कमल पुष्प के राशि का तीसरा भाग शङ्कर जी को, पांचवा भाग विष्णु को, छठवा भाग गणेश जी को और चौथा भाग दुर्गा जी को चढ़ाया गया, तब शेष ६ कमल बच गये, तो उन कमल पुष्पों की संख्या बताओ।

यहां पूरे पूरे कमल के पुष्प चढ़ाये गये हैं इस लिये उनकी संख्या ३, ५, ६, ४ इनके लघुतमापवर्त्य के बराबर अवश्य होनी चाहिये, और उक्त संख्याओं का लघुतमापवर्त्य ६० है इस लिये ६० पुष्पों की संख्या होनी चाहिये । परन्तु ६० का तीसरा भाग २०, पांचवा भाग १२, छठवा भाग १० और चौथा भाग १५ होता है, और इन भागों का योग ५७ होने से शेष ३ कमल पुष्प बचते हैं। और उदाहरण के शेष कमलों की संख्या ३ की दूनी है, इस लिये ६० × २ = १२० यह अभीष्ट कमलों की संख्या है ।

अथवा, यहां अज्ञात कमल पुष्पों की संख्या का मान १ मान कर १ का $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{६}$ और $\frac{१}{४}$ इन सब का योग १ में घटाने से ,

$$१ - \left(\frac{१}{३} + \frac{१}{५} + \frac{१}{६} + \frac{१}{४} \right) = १ - \left(\frac{२० + १२ + १० + १५}{६०} \right) =$$

$$१ - \frac{५७}{६०} = \frac{३}{६०} = \frac{१}{२०} ,$$

अब अभीष्ट कमलराशि का $\frac{१}{२०} = ६०$,

अथवा अभीष्ट कमलराशि $\times \frac{१}{२०} = ६०$,

$\therefore$ अभीष्ट कमलराशि $= ६० \div \frac{१}{२०} = \frac{६० \times २०}{१} = १२०$ उत्तर

इसी तरह अज्ञात राशि का मान १ मान कर कहीं कहीं उत्तर निकाला जाता है।

उदाहरण (२) एक मनुष्य ने अपनी आमदनी का $\frac{७}{९}$ अपने लड़के को दिया और बाकी जो आमदनी बची उसका $\frac{५}{८}$ अपने लड़की को दिया तब जो आमदनी का शेष भाग बचा वह ६० रुपये के बराबर है, तो उसकी आमदनी को बताओ।

यहां आज्ञात राशि उस मनुष्य की आमदनी है उसका मान १ मानने से,

$१ - \frac{७}{९} = \frac{२}{९}$ यह लड़के को देने के बाद बचा हुआ भाग,

$\therefore \frac{२}{९}$ का $\frac{५}{८} = \frac{५}{३६}$ यह लड़की को दिया हुआ भाग,

$\therefore \frac{२}{९} - \frac{५}{३६} = \frac{१}{१२}$ यह अन्त में बचा हुआ भाग,

$\therefore$ आमदनी का $\frac{१}{१२}$ बचा हुआ भाग = ६० रु०

अथवा, आमदनी $\times \frac{१}{१२}$ = ६० रु०,

$\therefore$ आमदनी = ६० रु० $\div \frac{१}{१२} = \frac{६० \times १२}{१}$ = ७२० रु०, उत्तर,

किन्तु जिस उदाहरण में अज्ञात राशि को किसी संख्या से गुणने वा भाग देने के अतिरिक्त उसमें कुछ जोड़ने वा घटाने को कहा गया हो अथवा वर्ग करने वा वर्गमूल निकालने को कहा गया हो वहां उस अज्ञात राशिका मान १ मानने से उत्तर नहीं आता है। ऐसी स्थिति में उदाहरण में कहे हुए अन्तिम फल में विपरीत क्रिया करने से उत्तर निकाला जाता है। अर्थात् उस अन्तिम फल में भाग देने के स्थान में गुणन, गुणन के स्थान में भाग, योग के स्थान में अन्तर, अन्तर के स्थान में योग, वर्ग के स्थान में वर्गमूल और वर्गमूल के स्थान में वर्ग करके उत्तर लाया जाता है। इसको **व्यस्तविधि** कहते हैं। और उस अन्तिम फल को दृश्य कहते हैं। इस क्रिया को अन्त से ही प्रारंभ करना चाहिये। यह सब विषय नीचे दिये हुए उदाहरणों से स्पष्ट होगा।

उदाहरण (३) मेरी आयु को ३ से गुणा करो और गुणनफल के $\frac{३}{४}$ का तिगुना करो और उसके $\frac{२}{९}$ का वर्गमूल ४ है, तो मेरी अवस्था बताओ।

न्यास— $\overset{\times}{३}$, $\overset{\text{का}}{\frac{३}{४}}$, $\overset{\times}{३}$, $\overset{\text{का}}{\frac{२}{९}}$, वर्गमूल, और दृश्य ४ है।

यहां ३ से गुणना है अतः ३ के ऊपर गुणन चिन्ह लिखा, और गुणनफल का $\frac{३}{४}$ है अतः $\frac{३}{४}$ के ऊपर 'का' को लिखा जिसका अर्थ गुणन होता है, फिर ३ से

गुणना है अतः ३ के ऊपर गुणन चिन्ह लिखा, फिर उसका $\frac{२}{९}$ है अतः $\frac{२}{९}$ के ऊपर 'का' लिखा, फिर वर्गमूल निकालना है अतः वर्गमूल लिखा। अब दृश्य ४ में अन्त से क्रिया प्रारंभ करने से, अन्त में वर्गमूल है इस लिये ४ का वर्ग $= ४ \times ४ =$ १६, और $\frac{२}{९}$ के ऊपर का चिन्ह है अतः $\frac{२}{९}$ का १६ में भाग दिया तब $१६ \div \frac{२}{९} = \frac{१६ \times ९}{२} = ७२$, इसके बाद ३ गुणक है इसलिये ७२ में ३ का भाग दिया तब $७२ \div ३ = २४$, इसके बाद $\frac{२}{७}$ के ऊपर का चिन्ह है अतः $२४ \div \frac{२}{७} = \frac{२४ \times ७}{२} = ८४$, इसके बाद ३ णक है इस लिये $८४ \div ३ = २८$ यह अभीष्ट अज्ञात राशि का मान हुआ।

परन्तु ऐसे प्रश्नों में यदि कोई संख्या अपने भिन्नात्मक अंश से युक्त वा न्यून करने के लिये कही गई हो तो क्रम से उस भिन्न संख्या के अंश को छेद में जोड़ दो वा घटा दो। और उस योग वा अन्तर को छेदस्थान में रखो और अंशस्थान में उस भिन्न के अंश को ही रखो। तब इस अंश और छेद से जो नई भिन्न संख्या बनेगी उतने उस दृश्य वा अन्तिम फल के अंश को उसीमें प्रश्न में जोड़ने को कहा हो तो घटा दो और घटाने को कहा हो तो जोड़ दो। तब आगे क्रिया करो।

उदाहरण (४) वह कौन संख्या है जसका $\frac{३}{७}$ उसी संख्या में जोड़ दो तो योग २० होता है।

यहां $\frac{३}{७}$ उसी संख्या के हैं यह सूचित करने के लिये $\frac{३}{७}$ स्व, ऐसा लिखने से स्पष्ट होता है। अब उस संख्या के $\frac{३}{७}$ उसमें जुड़े हुए हैं इस लिये ३ इस अंश को ७ छेद में जोड़ कर $\frac{३}{१०}$ इतने उस दृश्य के अंश उस दृश्य में घटाने होंगे। अतः २० का $\frac{३}{१०} = ६$ यह २० में घटाने मं १४ यह अज्ञात राशि का मान हुआ।

उदाहरण (५) वह कौनसी संख्या है जिसके $\frac{५}{६}$ उसमें जोड़ देने से जो योग होगा उसके $\frac{५}{११}$ उसी योग में घटा दो तो शेष ४२ बचता है।

यहां पहिले कहे हुए नियम के अनुसार न्यास,

$\overset{-}{\frac{२}{७}}$ स्व, $\overset{+}{\frac{५}{६}}$ स्व, और दृश्य ४२,

अब ४२ का $\frac{५}{६} = ४२ \times \frac{५}{६} = ३५$ इसको ४२ में जोड़ देने से ७७ योग हुआ, फिर ७७ का $\frac{२}{७} = ७७ \times \frac{२}{७} = २२$ इसको ७७ में घटाने से ५५ यह अभीष्ट अज्ञात राशि हुआ।

विविध उदाहरणमाला (२३)

(१) ४$\frac{१}{२}$ का १$\frac{१}{३}$ में कौन संख्या जोड़ने से योगफल ८ होगा ?

(२) ४$\frac{२}{३}$ में कौन संख्या घटा देने से २$\frac{१}{६}$ शेष बचेगा ?

(३) २$\frac{२}{३}$ को किस संख्या में घटाने से $\frac{८}{१३}$ का ५$\frac{१}{५}$ ÷ २$\frac{२}{१५}$ इतना शेष बचेगा ?

(४) किस संख्या को $\frac{४}{५}+\frac{३}{१०}$ इससे गुणने पर गुणनफल $\frac{७}{१६}+\frac{३}{४}+\frac{१}{४}$ यह होगा ?

(५) $\frac{२}{५}$ को किस संख्या से भाग देने पर लब्धि १० होगी ?

(६) $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$ इन के योग में इनका अन्तर कितनी बार सम्मिलित है ?

(७) ६$\frac{१}{३}$ से किस संख्या को भाग दें जिससे १$\frac{८}{१९}$ यह लब्धि होगी ?

(८) एक रुपये के किस भाग में २ आ० ८ पा० जोड़ने से योगफल ७ आने होंगे ?

(९) $\frac{५}{८}$ इसके अंश में क्या जोड़ने से उस भिन्न का $\frac{३}{४}$ यह मान होगा ?

(१०) वह चार भिन्न संख्याएँ कौन हैं जिनका जोड़ १ होता है और जिनके अंश क्रम से ७, ९, ११ और १३ हैं ?

(११) एक भिन्न संख्या में १ जोड़ने से योग $\frac{१}{३}$ होता है, यदि उस भिन्न का अंश १९$\frac{१}{२}$ है तो उसका छेद बताओ ।

(१२) $\frac{१}{६}$, $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{२}$ इनके योग में क्या मिलाने से योगफल अत्यन्त छोटी पूर्णाङ्क संख्या होगी ।

(१३) $\frac{३}{५}\frac{१}{६}\frac{१}{१२}$ इसको किससे गुणने पर गुणनफल छोटी से छोटी अभिन्न संख्या होगी ?

(१४) दो भिन्न संख्याओं का गुणनफल $\frac{१}{२}$ है, उनमें से एक भिन्न १$\frac{५}{९}$ है तो दूसरी कौन है ?

(१५) $\frac{४}{७}$, $\frac{३}{५}$, $\frac{२}{९}$ और $\frac{१}{३}$ इनमें सबसे छोटी भिन्न में सबसे बड़ी भिन्न को जोड़ो और योगफल में दूसरी दो भिन्नों के अन्तर का भाग दो ।

(१६) दो भिन्नों का योग २६$\frac{३}{५}$ है, एक भिन्न दूसरे से ४$\frac{५}{६}$ से कम है तो दूसरी भिन्न को बताओ ?

(१७) एक मजदूर एक काम को ८ दिन में करता है, और उसका लड़का उस काम को १२ दिन में करता है, तब बताओ प्रति दिन कौन किससे कितना अधिक काम करता है और दोनों मिल कर प्रति दिन कितना काम करते हैं ?

(१८) एक मनुष्य जब अपने धन का ४/७ खर्च करता है तब उसको मालूम होता है कि बचे हुए धन का २/११ का मान ३२४ रु० होते हैं, तो उसके पास कितना धन है ?

(१९) एक घोड़ा और गाड़ी का यौगिक मूल्य १०५ रु० हैं, यदि घोड़े का मूल्य गाड़ी के मूल्य से ६ १/२ गुना है, तो प्रत्येकका मूल्य बताओ ।

(२०) एक धन का ५/१२ अ को मिलता है, ब को २/९ मिलता है और क को शेष धन मिलता है, यदि क का भाग ८० रु० हों तो ब के भाग का मान निकट तम पाई तक बताओ ।

(२१) एक मनुष्य अपने आमदनी का १/१० धर्म कार्य में खर्च करता है और १/१५ टैक्स देने में खर्च करता है, यदि उसके पास ४०६ रु० बचते हों, तो उसकी आमदनी क्या है ?

(२२) एक थैली में कुछ द्रव्य था उसका ३/४ मजदूरी देने में खर्च किया गया और जो शेष बचा उसका ४/९ चुरा लिया गया, अब यदि उस थैली में २० रु० बचे तो उस थैली में पहिले कितना द्रव्य था ?

(२३) एक संख्या में उसका ग्यारहवा भाग घटाया जाय तो १०० शेष बचता है, तो उस संख्या को बताओ ।

(२४) एक मनुष्य को २०० बीघों का ३/८ मिला, उसने अपने भाग का २/३ बेच दिया तो उसके पास कितने बीघे शेष रहे ?

(२५) एक मनुष्य अपने सम्पत्ति का पांचवा भाग अपने ज्येष्ठ पुत्र को देता है और उसका छठवा भाग दूसरे चार पुत्रों में से प्रत्येक को देता है तब उसके पास १०००० रु० शेष बचते हैं तो उसका कुल धन कितना हैं ?

(२६) एक खम्भे का पांचवा भाग मिट्टी में, १/३ भाग जल में और १४ फीट जल के ऊपर हैं तो उस खम्भे की लम्बाई क्या है ?

(२७) एक संख्या में से १/५ − १/६ इतना घटाने से जो शेष बचा उसमें १/५×१/६ जोड़ा तब योगफल १/५+१/६ इतना हुआ, तो वह कौन संख्या है ?

(२८) एक संख्या का $\frac{१}{५}$ उसके $\frac{१}{८}$ से १८ अधिक है तो उस संख्या को बताओ।

(२९) २० हाथ लम्बे रस्सी के २$\frac{३}{४}$ हाथ लम्बाई के जितने टुकड़े किये जा सकते हैं उतने करने पर रस्सी का कौन भाग शेष रहेगा ?

(३०) एक लड़के के पास रुपये का बारहवा भाग था, उसमें से उसका $\frac{३}{८}$ उसने खर्च किया तो उसके पास कितना शेष रहा ?

(३१) २$\frac{३}{८}$ रुपये की पाई बनाओ, और ६$\frac{७}{१८}$ मन के छटांक बनाओ।

(३२) ७ तो० ८ मा० ५$\frac{३}{४}$ र० और ३ तो० ७ मा० ४$\frac{१}{२}$ र० इनके योग को ३५ $\frac{३}{८}$ से गुण दो।

(३३) ४॥) रु०, ३५$\frac{३}{४}$ आने, २$\frac{७}{८}$ चौअन्नियां इनका योग करो।

(३४) किसी संख्या में २$\frac{१}{२}$ जोड़ने से जो योग होगा उसको ४$\frac{१}{२}$ से गुण देने पर जो गुणनफल होगा उसमें ३ जोड़ने से जो योग होगा उसमें १$\frac{१}{२}$ का भाग देने से लब्धि २५ होती है, तो वह संख्या कौन है ?

(३५) वह संख्या कौन है ? जिसको ७ से गुण कर गुणनफल में ८ जोड़ दो, फिर उस योग में उसी के $\frac{३}{१०}$ जोड़ कर योगफल में ९ घटा दो और शेष में ११ का भाग दो तो लब्धि ६३ आती है।

(३६) यह सिद्ध करो कि प्रत्येक संख्या का $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$, और $\frac{१}{६}$ इनका योग उसी संख्या के समान होता है।

(३७) यह सिद्ध करो कि $\frac{३+४+९}{७+९+२०}$ इसका मान $\frac{३}{७}$ से बड़ा, $\frac{४}{९}$ के तुल्य और $\frac{९}{२०}$ से छोटा होता है।

(३८) किसी संख्या के वर्ग में उस वर्ग के $\frac{३}{५}$ और ९ जोड़ दो तो जो योग होगा उसके वर्गमूल में उसी मूल के $\frac{२}{३}$ घटा दो तो शेष ६ बचता है, बताओ वह कौन संख्या है ?

(३९) किस संख्या का $\frac{७}{१२}$ उसके $\frac{१}{२}$ से ७ अधिक है ?

(४०) राम के रुपये का $\frac{१७}{३७}$ कृष्ण के रुपये के $\frac{५}{६}$ से ५९ रुपये अधिक है, कृष्ण के रुपये का $\frac{१}{१२}$ यह ६० रुपये के बराबर है, तो राम के पास कितने रुपये हैं ?

(४१) यदि एक मनुष्य प्रति दिन $\frac{१}{१४६}$ पौंड खर्च करता है तो साल भर में वह कितना खर्च करेगा ?

(४२) यदि एक वस्तु का दाम १२ ५/९६ पौंड है, तो २५ दर्जन वस्तुओं का मूल्य बताओ।

(४३) वह सबसे बड़ी भिन्न कौन है ? जिसका अंश ५, ७, ६ इन तीन अङ्कों से बना है और उसका छेद ४, ३, ५, ७ इन चार अङ्कों से बना हुआ है।

(४४) एक मनुष्य ने अपने धन का ५/६ अपने ज्येष्ठ पुत्र को दिया, तब जो शेष बचा उसका ५/६ अपने कनिष्ठ पुत्र को दिया, यदि उन दोनों के हिस्सों का अन्तर ८००० रु० हों तो उस धन का मान क्या है ?

(४५) एक द्रव्य के थैली में से उस द्रव्य का ३/८ निकाल लेने के बाद जो शेष द्रव्य रहा उसका ३/५ यदि ६ रु० ११ आ० ८ पा० के बराबर हो तो बताओ उस थैली में कितना द्रव्य था ?

(४६) एक टोकरी में कुछ फल थे उनका तीसरा भाग राम को दिया गया, पांचवा भाग कृष्ण को दिया गया, और राम और कृष्ण के भागों के तिगुने अन्तर के तुल्य फल हरि को दिये गये, तब १ फल शेष रहा, बताओ उस टोकरी में कितने फल थे ?

(४७) एक बाग के पेड़ों में से आधे पेड़ आम के हैं, एक चतुर्थांश कटहर के, एक षष्ठांश अनार के और शेष अमरूद के पेड़ हैं, तब उस बाग के सब कितने पेड़ हैं ?

(४८) एक लड़के ने अपने पास के पैसों के १/४ पैसे के आम मोल लिये और शेष पैसों के ७/८ पैसे के केले मोल लिये तव उसके पास ९ पैसे बचे, बताओ उसके पास पहिले कितने पैसे थे ?

(४९) एक धन का १/२ अ को, १/३ क को और शेष ब को मिला, अ ने अपने हिस्से का आधा भाग अपने पास रख कर १/३ क को और शेष ब को दिया, तब क के पास ब से ९ रु० अधिक हुए, बताओ वह धन क्या है ?

(५०) एक रेल गाड़ी जब एक स्टेशन पर पहुंची, तब उसमें जितने यात्री थे उनमें से १/३ यात्री उतर गये और ९६ यात्री उसमें सवार हुए, आगे के स्टेशन पर इन सब यात्रियों में से आधे यात्री उतर गये और १२ नये यात्री सवार हुए, तब यात्रियों की संख्या २४८ हुई, तो बताओ उस रेलगाड़ी में पहिले कितने यात्री सवार थे ?

गुणोत्तर और अनुपात

(१३६) दो संख्याओं में तुलना करके एक संख्या दूसरी संख्या की कितनी गुनी है अथवा वह दूसरी संख्या के किस भाग के बराबर है इसको दिखलाने वाले सम्बन्ध को **गुणोत्तर** कहते हैं, अर्थात् पहिली संख्या में दूसरी का भाग देने से जो लब्धि होती है वही गुणोत्तर होता है। जैसे, ८ यह संख्या ४ की दूनी है इस लिये ८ में ४ का भाग देने से लब्धि २ को ८ और ४ का गुणोत्तर कहते हैं। और यहां ८ और ४ के बीच में भागहार के ÷ इस चिन्ह को न लिख कर केवल उस चिन्ह के ऊपर और नीचे के दो बिन्दुओं को लिखते हैं और बीच में की आड़ी रेखा को नहीं लिखते हैं। जैसे, ८ का ४ से गुणोत्तर दिखलाने के लिये ८ : ४ ऐसा लिखते हैं। इसको ८ के लिये जैसे ४ ऐसा पढ़ते हैं। और ८ और ४ इनको गुणोत्तर के **पद** कहते हैं, इनमें ८ को **पूर्वपद** और ४ को **उत्तरपद** कहते हैं।

(१३७) यदि गुणोत्तर के दोनों पदों की संख्या पदार्थ वाचक हो तो वे दोनों पदार्थ एक ही जाति के और एक ही नाम के होने चाहिये। जैसे, १० सेर और ५ सेर इनकी तुलना की जाय तो १० सेर ५ सेर के दूने हैं ऐसा कह सकते हैं। किन्तु १० सेर और ५ गज इनकी तुलना नहीं की जा सकती। क्योंकि १० सेर ५ गज के इतने गुने हैं ऐसा कहना असम्भव है।

उत्तरपद के कितने गुने के बराबर अथवा उत्तरपद के किस भाग के बराबर पूर्वपद है इसको गुणोत्तर दिखलाता है, इसलिये गुणोत्तर को भिन्नसंख्या में लिख कर प्रकट करते हैं, जिस भिन्नसंख्या के अंशस्थान में पूर्वपद और छेदस्थान में उत्तरपद को लिखते हैं। जैसे, ३ : ५ यहां ३ और ५ का गुणोत्तर $\frac{३}{५}$ यह होता है, और २० : २५ यहां २० और २५ का गुणोत्तर $\frac{२०}{२५} = \frac{४}{५}$ यह होता है।

(१३८) पदार्थ वाचक संख्याओं के गुणोत्तर की संख्या पदार्थ वाचक नहीं होती है। जैसे, १० यार्ड और ५ यार्ड इनका गुणोत्तर $\frac{१०}{५}$ यार्ड वा २ यार्ड नहीं किन्तु २ यह सामान्य संख्या होती है। इसी तरह ८ आम और ४ आम इनका गुणोत्तर $\frac{८}{४}$ वा २ यह सामान्य संख्या है २ आम गुणोत्तर नहीं होता है। यहां यार्ड और आम यह दोनों भिन्न पदार्थ होने पर भी १० यार्ड और ५ यार्ड का गुणोत्तर ८ आम और ४ आम के गुणोत्तर के तुल्य है, ऐसा हम कह सकते हैं।

(१३९) दो गुणोत्तर परस्पर समान हैं, इसको दिखलाने के लिये दोनों गुणोत्तरों के बीच में :: ऐसा अथवा = ऐसा चिन्ह रखते हैं। जैसे, १० : ५ :: ८ : ४, इसका अर्थ यह होता है कि ५ का १० से जो गुणोत्तर है वही ४ का ८ से गुणोत्तर है। दो गुणोत्तरों के परस्पर समत्व सम्बन्ध को **अनुपात** वा **समानुपात** कहते हैं।

चार पदों में, दूसरे पद के जितने गुने के बराबर अथवा दूसरे पद के जितने भाग के बराबर पहिला पद होता है, यदि चौथे पद के उतने ही गुने के बराबर अथवा चौथे पद के उतने ही भाग के बराबर तीसरा पद हो तो वे चारों पद अनुपात में हैं ऐसा कहा जाता है। जब चार पद अनुपात में होते हैं, तब उनमें से पहिले और चौथे पद को **अन्त्यपद** कहते हैं और दूसरे और तीसरे पद को **मध्यपद** कहते हैं। जैसे, १० : ५ :: ८ : ४ इस अनुपात में १० और ४ को अन्त्यपद और ५ और ८ को मध्यपद कहते हैं।

(१४०) अनुपात में अन्त्यपदों का गुणनफल मध्यपदों के गुणनफल के समान होता है। जैसे, २१ : ७ :: १२ : ४ यहां अन्त्यपद २१ और ४ इनका गुणनफल २१ × ४ = ८४, और मध्यपद ७ और १२ इनका गुणनफल ७ × १२ = ८४, ये दोनों गुणनफल समान हैं। मध्यपदों के गुणनफल को एक अन्त्यपद से भाग दो तो लब्धि दूसरा अन्त्यपद होता है। जैसे, मध्यपदों का गुणनफल ८४ में २१ का भाग देने से ४ लब्धि और ४ का भाग देने से २१ लब्धि होती है। इसी तरह अन्त्यपदों के गुणनफल में एक मध्यपद का भाग दो तो दूसरा मध्यपद लब्ध होता है। जैसे, अन्त्यपद का गुणनफल ८४ में ७ का भाग दो तो १२ लब्धि और १२ का भाग दो तो ७ लब्धि होती है।

उदाहरण—३, ६ और १० इनको अनुपात में लाने के लिये चौथा पद कौन हो सकता है?

३ : ६ :: १० : इष्टसंख्या,

$$\text{अतः इष्ट संख्या} = \frac{\overset{२}{\cancel{६}} \times १०}{\cancel{३}} = २०,$$

अतः २० यह चौथा पद है।

अनुपात सम्बन्ध के कुछ सिद्धान्त नीचे दिये गये हैं:—

१ ला सिद्धान्त—अनुपात में रहने वाली चार संख्याओं में पहिली और दूसरी संख्या को किसी संख्या से गुण दो और उसी संख्या से तीसरी और चौथी संख्या को गुण दो तो जो चार संख्या होंगी वे भी अनुपात में होंगी।

२ रा सिद्धान्त—यदि चार संख्याएँ इस तरह लिखी जा सकें कि पहिली और चौथी का गुणनफल दूसरी और तीसरी के गुणनफल के समान हो, तो वे चार संख्याएँ अनुपात में होंगी।

३ रा सिद्धान्त—अनुपात में रहने वाली चार संख्याओं में पहिली और दूसरी संख्या का योग और पहिली संख्या इनका गुणोत्तर तीसरी और चौथी संख्या का योग और तीसरी संख्या इनके गुणोत्तर के समान होता है।

४ था सिद्धान्त—अनुपात में रहने वाली चार संख्याओं में पहिली और दूसरी संख्या का अन्तर और दूसरी संख्या इनका गुणोत्तर तीसरी और चौथी संख्या का अन्तर और चौथी संख्या इनके गुणोत्तर के समान होता है।

५ वा सिद्धान्त—दिये हुए समान गुणोत्तरों के सब पूर्वपदों का योग और उत्तरपदों का योग इनका गुणोत्तर दिये हुए गुणोत्तरों में से किसी एक गुणोत्तर के समान होता है। जैसे, १० : ५ ; ८ : ४ ; ६ : ३ ; इनमें से प्रत्येक का गुणोत्तर २ होने से ये समान गुणोत्तर हैं। अब इनके पूर्वपदों का योग = १० + ८ + ६ = २४, और उत्तरपदों का योग = ५ + ४ + ३ = १२, और २४ : १२ इनका भी गुणोत्तर पूर्व गुणोत्तरों में से किसी एक गुणोत्तर के समान है।

६ वा सिद्धान्त—अनुपात में रहने वाली चार संख्याओं में पहिली और तीसरी संख्या का गुणोत्तर दूसरी और चौथी संख्या के गुणोत्तर के तुल्य होता है। और इसको **एकान्तरानुपात** कहते हैं। जैसे, ३ : ६ :: ९ : १८ इस समानानुपात का ३ : ९ :: ६ : १८ यह एकान्तरानुपात होता है। और इसमें $\frac{३}{९} = \frac{६}{१८}$ है।

उदाहरणमाला (२४)

(१) १७ रुपये का ८ आने से गुणोत्तर क्या होगा ?

(२) १३ पौण्ड का ८ पेन्स से गुणोत्तर क्या होगा ?

(३) अनुपात में रहने वाले १५, १३ और २२५ यह तीन पद हैं तो चौथा पद कौन होगा ?

(४) ७ : ११ और २९ : ४५ इन दो गुणोत्तरों में बडा गुणोत्तर कौन है?

(५) ३ : ५ ; ७ : ९ ; १३ : १७ ; २ : ११ ; इन गुणोत्तरों में सबसे छोटा गुणोत्तर कौन है ?

(६) एक अनुपात में ११ और २१ यह अन्त्यपद हैं, और एक मध्यपद ९ है तो दूसरे मध्यपद को बताओ ।

(७) वृत्त का व्यास और परिधि इनका गुणोत्तर ७ : २२ यह होता है, यदि किसी वृत्त का परिधि ३ फू० ८ इ० हो, तो उसका व्यास क्या होगा ?

(८) नीचे दिये हुए अनुपातों में छूटे हुए पदों को लिखो ।

२ : ५ : : * : १० ; ७ : * : : ३५ : १५ ; ५ : ८ : : ६५ : * ।

(९) किसी गुणोत्तर का उत्तरपद ३ रु० ६ आ० है और यदि उस गुणोत्तर का $\frac{4}{5}$ यह मान हो, तो उसका पूर्वपद क्या होगा ?

(१०) किसी अनुपात में के दो गुणोत्तरों में से एक गुणोत्तर २८७ : ८६१ यह है, दूसरे गुणोत्तर का उत्तरपद १३ रु० १४ आ० यह है, तो उसका पूर्वपद क्या होगा ?

त्रैराशिक

(१४१) अनुपात में रहने वाले चार राशियों में से कोई तीन राशि दिये हुए हों तो उनसे चौथे राशि को मालूम करने के विधि को **त्रैराशिक** कहते हैं ।

(१४२) त्रैराशिक दो प्रकार का होता है : एक **समत्रैराशिक** और दूसरा **व्यस्तत्रैराशिक** ।

जब अनुपात में रहने वाले पदार्थ और उनके मूल्य, नाप किंवा वजन इनमें परस्पर ऐसा सम्बन्ध होता है कि एक के घटने वा बढने से दूसरा क्रम से घटता वा बढता है, तब वे पदार्थ और उनके मूल्य आदि **समानुपात** में हैं, ऐसा कहा जाता है । अर्थात् समानुपात में जो दो गुणोत्तर होते हैं उनमें पहिले गुणोत्तर का पूर्वपद उसके उत्तरपद से अधिक वा कम हो तो दूसरे गुणोत्तर का पूर्वपद उसके उत्तरपद से क्रम से- अधिक वा कम होता है । और समानुपात के त्रैराशिक को सम त्रैराशिक कहते हैं ।

और जब अनुपात में रहने वाले पदार्थ और उनके मूल्य, नाप किंवा वजन इनमें परस्पर ऐसा सम्बन्ध होता है कि एक के घटने वा बढने से दूसरा इसके विपरीत बढता वा घटता है तब वे पदार्थ और उनके मूल्य आदि व्यस्तानुपात में हैं ऐसा कहा जाता है। अर्थात् व्यस्तानुपात में जो दो गुणोत्तर होते हैं उनमें पहिले गुणोत्तर का पूर्वपद उसके उत्तरपद से अधिक वा कम हो तो इसके विपरीत दूसरे गुणोत्तर का पूर्वपद उसके उत्तरपद से कम वा अधिक होता है। और व्यस्तानुपात के त्रैराशिक को व्यस्त त्रैराशिक कहते हैं।

जैसे, किसी आदमी को नौकर रखा जाय तो जैसे जैसे उसके नौकरी का काल बढता जायगा वैसे वैसे उसकी मजदूरी बढती जायगी। इसलिये यहां नौकरी का काल और मजदूरी का द्रव्य यह समानुपात में होने से इनके सम्बन्ध का त्रैराशिक समत्रैराशिक होगा। परन्तु यदि कोई एक काम करने के लिये कुछ मनुष्य नियुक्त किये जांय तो जैसी जैसी मनुष्यों की संख्या बढायी जाती है वैसी वैसी उस काम को करने में लगने वाले दिनों की संख्या कम होती जाती है। इसलिये यहां मनुष्यों की संख्या और काम के दिनों की संख्या व्यस्तानुपात में होने से इस विषय का त्रैराशिक व्यस्तत्रैराशिक होता है।

(१४३) त्रैराशिक में आने वाले तीन पदों के नाम प्रमाण, प्रमाणफल और इच्छा यह होते हैं। इन तीन पदों से जो चौथा पद निकाला जाता है उसको इच्छाफल कहते हैं। इन तीन पदों में से दो पद अर्थात् प्रमाण और इच्छा एक जाति के होने चाहिये। और तीसरा पद अर्थात् प्रमाणफल यह इच्छा फल की जाति का होना चाहिये। जैसे, एक पैसे को ५ आम मिलते हैं तो ८ पैसे को कितने मिलेंगे? यहां १ पैसा प्रमाण, ५ आम प्रमाणफल और ८ पैसे यह इच्छा है। इनमें प्रमाण और इच्छा दोनों पैसे की जाति के हैं और प्रमाणफल और उत्तर में आने वाला इच्छाफल ये दोनों आम की जाति के हैं।

सम त्रैराशिक का न्यास

(१४४) गुणोत्तर सजातीय पदार्थों का ही निकाला जाता है, इस पूर्व कथित नियम से सम त्रैराशिक के समानुपात में जो दो गुणोत्तर होते हैं उनमें पहिले गुणोत्तर का पूर्वपद प्रमाण और इच्छा यह उत्तरपद होता है। और दूसरे गुणोत्तर

का पूर्वपद प्रमाणफल और उत्तरपद इच्छाफल होता है। इसलिये सम त्रैराशिक में पहिले स्थान में प्रमाण, दूसरे स्थान में इच्छा और तीसरे स्थान में प्रमाणफल लिखा जाता है। और (१४०) प्रक्रम से दूसरे और तीसरे राशि के गुणनफल में अर्थात् इच्छा और प्रमाणफल के गुणनफल में प्रमाण इस अन्त्यपद का भाग देने से इच्छाफल यह दूसरा अन्त्यपद लब्ध होता है, जो कि अभीष्ट उत्तर होता है। यदि प्रमाण और इच्छा यह एक जाति के न हों तो सवर्णन वा विवर्णन विधि से उनको पहिले एक जाति के बना कर तब इच्छा और प्रमाणफल के गुणनफल में प्रमाण का भाग देना चाहिये।

इससे यह नियम बनता है कि सम त्रैराशिक में प्रमाण से इच्छा अधिक वा न्यून हो तो क्रम से प्रमाणफल से इच्छाफल अधिक वा न्यून होता है। और यहां इच्छा और प्रमाणफल के गुणनफल में प्रमाण का भाग दे कर इच्छाफल वा उत्तर लाया जाता है।

उदाहरण (१) एक नौकर की ८ महीने की मजदूरी ६४ रु० है तो उसकी १० महीने की मजदूरी क्या होगी?

यहां ८ महीने प्रमाण, ६४ रु० प्रमाणफल और १० महीने इच्छा है और इन तीनों से मजदूरी यह इच्छाफल लाना है। और जैसे जैसे नौकरी के महीने अधिक होंगे वैसी वैसी मजदूरी अधिक मिलेगी इसलिये मजदूरी और महीने यह समानुपात में होने से यह सम त्रैराशिक है। अतः यहां पहिले स्थान में प्रमाण, दूसरे स्थान में इच्छा और तीसरे स्थान में प्रमाणफल को रखा। तब,

८ महीने : १० महीने :: ६४ रु० : इष्ट रुपये,

$\therefore$ इष्ट रुपये $= \frac{१० \times \overset{८}{\cancel{६४}}}{\cancel{८}} = ८०$, $\therefore$ ८० रुपये, उत्तर,

यहां ८ महीने से १० महीने अधिक हैं तो ६४ रु० से ८० रु० अधिक हैं।

उदाहरण (२) एक नौकर की ६ महीने की मजदूरी ४८ रु० हों तो उसकी १ महीने की मजदूरी क्या होगी?

यहां जैसे जैसे नौकरी के महीने घटेंगे वैसी वैसी मजदूरी घटेगी इसलिये यह सम त्रैराशिक है। अतः,

६ महीने : १ महीना : : ४८ रु० : इष्ट रुपये,

∴ इष्ट रुपये = $\frac{१ \times \overset{८}{\cancel{४८}}}{\cancel{६}}$ = ८, ∴ ८ रुपये, उत्तर,

यहां ६ महीने से १ महीना कम है तो ४८ रुपये से ८ रुपये कम हैं।

व्यस्त त्रैराशिक का न्यास

(१४५) व्यस्तानुपात में जो दो गुणोत्तर होते हैं उनमें से किसी एक गुणोत्तर के पूर्वपद के स्थान में उत्तरपद को और उत्तरपद के स्थान में पूर्वपद को रखने से वह व्यस्तानुपात समानुपात में परिवर्तित हो जाता है। जैसे, १० : ५ : : २ : ४ इस व्यस्तानुपात के १० : ५ इस गुणोत्तर के पदों को उनके स्थान बदल कर ५ : १० : : २ : ४ इस तरह लिखें तो यह समानुपात होता है। क्योंकि यहां ५ से १० अधिक हैं तो २ से ४ अधिक हैं। और जब कि अन्त्यपदों का घात मध्यपदों के घात के तुल्य समानुपात में ही होता है व्यस्तानुपात में नहीं होता। इसलिये तीन राशियों से चौथे राशि को लाने के लिये व्यस्त त्रैराशिक के व्यस्तानुपात को समानुपात में परिवर्तित करना चाहिये अर्थात् व्यस्त त्रैराशिक में पहिले स्थान में इच्छा को, दूसरे स्थान में प्रमाण को और तीसरे स्थान में प्रमाणफल को लिखना चाहिये। और तब दूसरे और तीसरे राशि के घात में अर्थात् प्रमाण और प्रमाणफल के घात में इच्छा का भाग दे कर इच्छा फल रूपी चतुर्थ राशि को लाना चाहिये।

इससे यह नियम बनता है कि व्यस्त त्रैराशिक में प्रमाण से इच्छा अधिक वा कम हो तो प्रमाणफल से इच्छाफल क्रम से कम वा अधिक होता है। और प्रमाण और प्रमाणफल के गुणनफल में इच्छा का भाग दे कर इच्छाफल रूपी उत्तर लाया जाता है।

उदाहरण (३) ८ मनुष्य एक काम १५ दिन में करते हैं, तो वही काम १२ मनुष्य कितने दिन में करेंगे ?

यहां ८ मनुष्य प्रमाण, १५ दिन प्रमाणफल और १२ मनुष्य इच्छा है, और इन तीनों पर से दिन यह इच्छाफल लाना है। और जैसे जैसे मनुष्य अधिक होंगे वैसे वैसे वह काम समाप्त करने में दिन कम लगेंगे अर्थात् दिनसंख्या

मनुष्यसंख्या के व्यस्तानुपात में होने से यह व्यस्त त्रैराशिक है। इसलिये यहां पहिले स्थान में इच्छा, दूसरे स्थान में प्रमाण और तीसरे स्थान में प्रमाणफल को रखा। तब,

१२ मनुष्यः ८ मनुष्य :: १५ दिन : इष्ट दिन,

$$\therefore \text{इष्ट दिन} = \frac{८ \times १५}{१२} = १०, \quad \therefore १० \text{ दिन, उत्तर,}$$

सम और व्यस्त त्रैराशिकों में पदों के न्यास का दूसरा नियम

(१४६) इच्छाफल वा उत्तर जिस जाति का होगा उस जाति के राशि को अर्थात् प्रमाणफल को सर्वदा तीसरे स्थान में रखो। और देखो कि प्रमाणफल से इच्छाफल छोटा है वा बड़ा है। यदि प्रमाणफल से इच्छाफल छोटा हो तो शेष दो राशियों में अर्थात् प्रमाण और इच्छा इन दोनों में जो छोटा होगा उसको दूसरे स्थान में रखो और बड़े को पहिले स्थान में रखो। और यदि प्रमाणफल से इच्छाफल बड़ा हो तो प्रमाण और इच्छा इनमें जो बड़ा होगा उसको दूसरे स्थान में रखो और छोटे को पहिले स्थान में रखो। तब दूसरे और तीसरे राशि के गुणनफल में पहिले राशि का भाग दो। लब्धि इच्छाफल वा उत्तर होगा। यह नियम सम और व्यस्त दोनों त्रैराशिकों में लग सकता है।

उदाहरण (४) १२ आम का मूल्य =)। है तो १००० आम का मूल्य क्या होगा?

यहां जैसे जैसे आम अधिक होंगे वैसा मूल्य अधिक होगा, इसलिये यह सम त्रैराशिक है। और यहां मूल्य लाना है जिसका सजातीय पद =)। = $\frac{९}{४}$ आना = $\frac{९}{६४}$ रु० इसको तीसरे स्थान में रखा। और यहां =)। इससे उत्तर अधिक होगा इसलिये शेष पद १२ आम और १००० आम इनमें १००० आम इस बड़े पद को दूसरे स्थान में और १२ आम इस छोटे पद को पहिले स्थान में रखा। तब,

१२ आमः १००० आम :: $\frac{९}{६४}$ रु० : इष्ट रु०,

$$\therefore \text{इष्ट रु०} = \frac{१००० \times ९}{१२ \times ६४} = \frac{३७५}{३२} \text{रु०} = ११ \text{रु० } ११ \text{ आ० } ६ \text{पा० उत्तर,}$$

उदाहरण (५) एक गाड़ीवान ३ मन चावल ७२ मील ले जाने के लिये १० रु० ८ आ० किराया लेता है, तो उतने ही किराये में ४½ मन चावल वह कितने मील ले जायगा ?

४½ मन = ९/२ मन, और यहां किराया एक ही होने से जैसे जैसे बोझा अधिक होगा वैसी मील की संख्या कम होगी इस लिये यह व्यस्त त्रैराशिक है। और यहां मील की संख्या लाना है इसलिये उसके सजातीय ७२ मील इस प्रमाणफल को तीसरे स्थान में रखा, और बोझा अधिक होने से उत्तर ७२ मील से कम आवेगा, इसलिये शेष पद ३ मन और ९/२ मन इनमें ३ मन इस छोटे पद को दूसरे स्थान में और ९/२ मन इस बड़े पद को पहिले स्थान में रखा। तब,

$$\frac{९}{२} \text{ मन} : ३ \text{ मन} :: ७२ \text{ मीलः इष्ट मील},$$

$$\therefore \text{ इष्ट मील} = \frac{३ \times \overset{८}{\cancel{७२}} \times २}{\cancel{९}} = ४८, \therefore ४८ \text{ मील, उत्तर,}$$

उदाहरण (६) १२ मनुष्यों के परिवार को ४ मन चावल १० महीनों के लिये पर्याप्त होते हैं, तो ८ मनुष्यों के परिवार को उतने ही चावल कितने समय के लिये पर्याप्त होंगे ?

यहां चावल उतने ही होने से जैसे मनुष्यों की संख्या कम होगी वैसा महीनों की संख्या अधिक होगी इसलिये यह व्यस्त त्रैराशिक है। और यहां महीने लाना है इस लिये उनके सजातीय १० महीने इस पद को तीसरे स्थान में रखा। और मनुष्य कम होने से महीने अधिक होंगे अर्थात् प्रमाणफल से इच्छा फल अधिक होगा इसलिये शेष पद १२ मनुष्य और २८ मनुष्य इनमें १२ मनुष्य इस बड़े पद को दूसरे स्थान में और ८ मनुष्य इस छोटे पद को पहिले स्थान में रखा। तब,

$$८ \text{ मनुष्यः } १२ \text{ मनुष्य} :: १० \text{ महीने} : \text{इष्ट महीने},$$

$$\therefore \text{ इष्ट महीने} = \frac{\overset{३}{\cancel{१२}} \times \overset{५}{\cancel{१०}}}{\cancel{८}} = १५, \therefore १५ \text{ महीने, उत्तर.}$$

उदाहरण (७) प्रतिदिन १२ कोस के हिसाब से चल कर एक ग्राम से दूसरे ग्राम में पहुंचने में १० दिन लगते हैं, तो प्रति दिन १५ कोस के हिसाब से चलने से कितने दिन लगेंगे ?

यहां दोनों ग्रामों का अन्तर कायम होने से जैसे जैसे अधिक चला जायगा वैसी दिनसंख्या कम होगी इसलिये यह व्यस्त त्रैराशिक है। और यहां दिन उत्तर लाना है इसलिये तत्सजातीय १० दिन इस पद को तीसरे स्थान में रखा। और अधिक चलने से कम दिन लगेंगे इसलिये शेष पद १२ कोस और १५ कोस इन में १२ कोस इस छोटे पद को दूसरे स्थान में रखा और १५ कोस इस बड़े पद को पहिले स्थान में रखा। तब,

१५ कोस : १२ कोस : : १० दिन : इष्ट दिन,

$$\therefore \text{इष्ट दिन} = \frac{१२ \times १०}{१५} = ८, \therefore ८ \text{ दिन, उत्तर.}$$

उदाहरण (८) २ हाथ चौडे ५ गज छीट का मूल्य २॥=) रु० हो तो उतने ही मूल्य में २$\frac{१}{२}$ हाथ चौडा छीट कितना मिलेगा ?

यहां २$\frac{१}{२}$ हाथ = $\frac{५}{२}$ हाथ, और मूल्य वही होने से जैसी जैसी चौडाई बढेगी वैसी लम्बाई घटेगी इससे यह व्यस्त त्रैराशिक है। और यहां गज यह उत्तर लाना है इसलिये तत्सजातीय ५ गज इस पद को तीसरे स्थान में रखा। और चौड़ाई बढ़ने से लम्बाई घटेगी इसलिये शेष पद २ हाथ और $\frac{५}{२}$ हाथ इनमें २ हाथ इस छोटे पद को दूसरे स्थान में रखा और $\frac{५}{२}$ हाथ इस बडे पद को पहिले स्थान में रखा। तब,

$\frac{५}{२}$ हाथ : २ हाथ : : ५ गज : इष्ट गज,

$$\therefore \text{इष्ट गज} = \frac{२ \times ५ \times २}{५} = ४, \therefore ४ \text{ गज, उत्तर.}$$

उदाहरणमाला (२५)

(१) एक जहाज ३२ दिन में ८०० मील जाता है, तो वह २५४० मील कितने दिन में जायगा ?

(२) २५ मनुष्य २० एकर जमीन पर की घास १ दिन में काटते हैं, तो उतने ही समय में ३५ मनुष्य कितने एकर जमीन की घास काटेंगे ?

(३) १ तोला ७ माशा सोने का मूल्य ३५ रु० १२ आ० हो तो १ माशा ७ र० सोने का मूल्य बताओ ।

(४) एक मनुष्य की वार्षिक प्राप्ति १००० रु० की है और उसको ५ पा० प्रति रुपये के हिसाब से टैक्स देना पड़ता है, तो टैक्स देने पर उसके पास कितना बचेगा ?

(५) १० बैलों का मूल्य ३५ भेडों के मूल्य के बराबर हो तो ४९४९ भेडों को दे कर कितने बैल मिल सकेंगे ?

(६) ५ फूट ऊंचे सीढी की छाया ३ फू० ९ इ० हो तो जिस सीढी की छाया ४ फू० ११ इ० है, उसकी उंचाई कितनी होनी चाहिये ?

(७) एक महाजन का दिवाला जब हुआ तब उसको ८५० रु० का कर्जा था, उसकी सब सम्पत्ति ४७५ रु० में बेची गयी तो उसको प्रत्येक रुपये में कितना कम देना पड़ा ?

(८) एक दिवालिये की सम्पत्ति ९६० पौंडों में बेची गयी जिनको उसके महाजनों ने ८ शि० प्रति पौंड के हिसाब से आपस में बांट लिया, तो उसका कुल कर्जा कितना था ?

(९) एक व्यापारी को १०५३५ रु० ८ आ० का देना था जिसको उसने अपनी सब सम्पत्ति बेच कर १० आ० ८ पा० प्रति रुपये के हिसाब से दे कर अदा किया तो उसकी सम्पत्ति कितने रुपयों में बेची गयी ?

(१०) एक मनुष्य की वार्षिक प्राप्ति ४००० रु० हैं, किन्तु टैक्स देने के बाद उसके पास ३८,०० रु० बचते हैं, तो उसको प्रत्येक रुपये के लिये कितना टैक्स देना पडता है ?

(११) २ पा० प्रति रुपये के हिसाब से आमदनी पर का टैक्स देने पर एक मनुष्य के पास उसके वार्षिक आमदनी में से ९८ रु० १५ आ० ४ पा० शेष बचते हैं, तो उसकी वार्षिक आमदनी बताओ ।

(१२) एक घडी ३ सेकण्ड प्रति घण्टे के हिसाब से तेज चलती है, एक दिन दोपहर को १२ बजे वह शुद्ध घडी से मिलाई गई, तो उसी दिन रात को ११ बजे उस अशुद्ध घड़ी के हिसाब से क्या समय होगा ?

(१३) एक दिन सुबह १० बजे एक घड़ी शुद्ध घड़ी से मिलाई गई, दूसरे

दिन रात को जब ठीक ८ बजे तब उस घड़ी में ८ बजने को १० मिनट कम थे, तो बताओ वह प्रति घंटे कितना सुस्त चलती है ।

(१४) एक दिन दो पहर को १२ बजे एक घड़ी शुद्ध घड़ी से मिलाई गई, उसी दिन रात को ठीक ११ बजे उस घडी में ११ बज कर २ मिनट हुए थे, तो बताओ उसके दूसरे दिन रात को ठीक ८ बजे उस अशुद्ध घड़ीमें क्या समय होगा ?

(१५) १५ मनुष्य एक काम २५ दिन में करते हैं, तो वही काम ६ मनुष्य कितने दिन में करेंगे ?

(१६) एक किले को जब शत्रु ने चारो ओर से घेर लिया तब सवा सेर अन्न प्रति मनुष्य के हिसाब से १५ दिन का भोजन उस किले के लोगों के पास था, यदि २३ दिन तक वह घेरा कायम रहता तो २३ दिन तक भोजन की कमी न होने के लिये प्रति दिन प्रति मनुष्य को कितना अन्न खाना चाहिये ?

(१७) एक किले में २८ मनुष्यों को १७$\frac{1}{2}$ दिन के लिये पर्याप्त भोजन था, तो ४९ दिन तक वह भोजन पर्याप्त होने के लिये उस किले में से कितने लोगों को निकल जाना चाहिये ?

(१८) २ वर्ष तक हल खीचने का काम करने वाले बैल का मूल्य ३६ रु० हो, तो ६ वर्ष तक हल खीचने वाले बैल का मूल्य बताओ ।

(१९) २० रु० तोले के भाव का सोना ५ रु० में ३ माशा मिलता है, तो ३० रु० तोले के भाव का सोना उतने ही रुपयों में कितना मिलेगा ?

(२०) एक अन्न की ढेरी जब ७ सेर की टोकरी से नापी जाती है, तो १०० टोकरियां गिनती में होती हैं, यदि वह ढेरी ५ सेर की टोकरी से नापी जाय तो कितनी टोकरियों से गिनी जायगी ?

(२१) एक हौज में ८ मनुष्यों को ६ दिन के लिये पर्याप्त जल है, तो वह १८ मनुष्यों को कितने दिन के लिये पर्याप्त होगा ?

(२२) ९० दिन में एक खेत की घास कटवाने के लिये २० मनुष्यों को रखना पड़ता है, यदि १६ मनुष्य अधिक रखे जांय, तो वह कुल घास कितने दिन में काटी जायगी ?

(२३) जब चीनी रुपये में ४ सेर मिलती थी, तब एक मनुष्य के परिवार में प्रति वर्ष १०० रु० की चीनी खर्च होती थी, जब चीनी रुपये में पौने चार सेर

मिलने लगी तब उस मनुष्य को यदि अधिक खर्च न करना हो, तो कितनी कम चीनी लेनी चाहिये ?

(२४) एक मनुष्य की वार्षिक प्राप्ति १५० रु० की है, और वह ३ महीने की आमदनी ४ महीने में खर्च करता है, तो साल अखीर में उसके पास कितना बचेगा ?

(२५) एक घड़ी प्रति घण्टे जितना तेज चलती है दूसरी घड़ी उतना ही प्रति घण्टे सुस्त चलती है, वे दोनों घड़ियां एक दिन १२ बजे दो पहर को शुद्ध घड़ी से मिलाई गईं, उसी दिन रात को ८ बजे उन दोनों घड़ियों में २४ सेकण्ड का अन्तर हुआ तो पहिली घड़ी प्रति घण्टे कितना तेज और दूसरी घड़ी प्रति घण्टे कितना सुस्त चलती है ?

(२६) एक काम १ पुरुष १२ दिन में करता है, वही काम १ लड़का १८ दिन में करता है तो वे दोनों मिल कर उस काम को कितने दिनों में करेंगे ?

(२७) एक काम अ और ब मिल कर ३ $\frac{३}{४}$ दिन में करते हैं, अकेला अ वह काम ८ $\frac{१}{३}$ दिन में करता है, तो अकेला ब उस काम को कितने दिन में करेगा ?

(२८) एक व्यापारी ने १८० रु० के जव खरीद कर उनको रुपये को १६ सेर के भाव से बेच दिया, जिससे उसको ४५ रु० का मुनाफा हुआ, तो उसने रुपये को कितने सेर के भाव से जव खरीदे थे ?

(२९) एक व्यापारी को विदेश में ५०० पौण्ड भेजना है, यदि रुपये का भाव १ शि० ४ पे० हो, तो उसको कितने रुपये भेजने चाहिये ?

(३०) एक एञ्जिन के पहिये का परिधि २२६ इञ्च है, यदि एक मिनट में उस पहिये के ९१ चक्कर होते हों, तो वह एञ्जिन एक घण्टे में कितने मील जाता है ?

(३१) एक व्यापारी ने रुपये को २४ सेर के भाव से ९० मन अन्न खरीद कर वह सब ५० रु० मुनाफे से बेच दिया, तो उसने रुपये को कितने सेर के भाव से अन्न बेचा ?

(३२) रुपये को १६ सेर के भाव से ६० रु० का अन्न खरीद कर रुपये को १२ सेर के भाव से वह बेचा जाय, तो कितने रुपये का लाभ होगा ?

(३३) एक मनुष्य की साल की आमदनी ४००० रु० है, और उसको दो पैसे प्रति रुपये के हिसाब से टैक्स देना होता है, यदि प्रति वर्ष उसके पास ५९० रु० बचते हों, तो उसका प्रति सप्ताह का खर्च बताओ।

(३४) १० पुरुष एक काम ६ दिन में करते हैं, और वही काम १८ लड़के ८ दिन में करते हैं, तो ५ पुरुष और ९ लड़के मिल कर वह काम कितने दिन में करेंगे ? और यदि उस काम के लिये ७५ रुपये मजदूरी देनी पड़ती हो, तो १ पुरुष और १ लड़का इनमें से प्रत्येक की रोज की मजदूरी बताओ।

(३५) जितने समय में अ ३ ताव कागज लिखता है, उतने ही समय में ब ५ ताव कागज लिखता है, यदि उन दोनों ने मिल कर १३६ ताव कागज लिखे, तो उनमें अ के कितने ताव कागज थे ?

(३६) अ और ब इन दोनों में ५७६ रु० बांटे गये, यदि उनके हिस्सों का गुणोत्तर ५ : ७ यह हो तो प्रत्येक को कितने रुपये मिले ?

(३७) ६० रु० प्रति महीने के हिसाब से $२\frac{१}{२}$ वर्ष तक खर्च करने से एक मनुष्य को कर्ज हुआ, तब उसने आगे ३ वर्ष तक $२७\frac{१}{२}$ रु० प्रति महीने के हिसाब से खर्च कम किया, जिससे वह ऋण मुक्त हुआ, तो उसकी प्रति मास की आमदनी क्या थी ?

(३८) १० भैंस और १५ गायों को प्रति सप्ताह ४० सेर घास पर्याप्त होती है, तो ६ भैंस और १८ गायों को ३० सेर घास कितने समय के लिये पर्याप्त होगी ?

(३९) मालगाड़ी और घोड़ा गाड़ी इनके गति का प्रमाण ४ : ९ यह है, घोड़ा गाड़ी $३\frac{१}{२}$ घण्टे में ५५ मील जाती है, तो इतनी दूरी के $\frac{३}{२}$ दूरी तक जाने में मालगाड़ी को कितना समय लगेगा ?

(४०) एक किसान ने ४ भैंस और ७ बैल २३८ रुपये में खरीदे, १ भैंस और १ बैल इनके मूल्य का प्रमाण ५ : २ यह हो, तो १ बैल और १ भैंस इनमें से प्रत्येक का मूल्य बताओ।

(४१) एक दूध वाले ने रुपये को १० सेर इस भाव से ४ रु० का दूध खरीदा. यदि उसको वह दूध रुपये को १२ सेर इस भाव से बेचना हो तो उसको उस दूध में कितना पानी मिलाना चाहिये ?

(४२) एक बनिये ने रुपये को सवा सेर इस भाव से ४ रु० का घी खरीद कर उसमें रुपये को डेढ सेर के भाव का ६ रु० का घी मिला दिया, तो उसको वह घी रुपये को कितने सेर के भाव से बेचना चाहिये जिससे उसको नुकसान उठाना न पड़े ?

(४३) जब ५ रु० मन के भाव से गेहूं बिकता है, तब २$\frac{1}{2}$ आने सेर आटा बिकता है, यदि ५ रु० मन के भाव से आटा बिकने लगे तो, उस वक्त गेहूं का भाव क्या होगा ?

(४४) ३ पुरुषों का खर्च ४ लडकों के खर्च के बराबर होता है, और ३ लड़कों का १ हप्ते का खर्चा १ रु० ३ आ० २$\frac{1}{2}$ पा० हो, तो उतने ही समय में ५१ पुरुषों को कितना खर्चा लगेगा ?

(४५) अ को ३$\frac{3}{4}$ मील चलने में जितना समय लगता है उतने ही समय में ब ४ मील चलता है, यदि अ ६ दिन में १६५ मील जाता है, तो ब १५ दिन में कितने मील जायगा ?

(४६) एक खेत की घास २४ भैसों को एक हप्ते के लिये पर्याप्त होती है, तो वह ६० गायों को कितने दिन के लिये पर्याप्त होगी ? यदि १ भैस ३ गायों के इतना खाती है ।

(४७) एक काम ४ पुरुष वा १४ लड़के १८ दिन में करते हैं, तो वही काम ७ पुरुष और ७ लड़के मिल कर कितने दिन में करेंगे ?

(४८) जब गेहूं का भाव रुपये को १२ सेर होता है, तो एक परिवार का ५० रु० प्रति मास का खर्चा होता है, और वह भाव जब रुपये को १४ सेर होता है, तो प्रति मास ४८ रु० खर्च होते हैं, यदि वह भाव रुपये को १६ सेर हो तो प्रति मास कितना खर्च होगा ?

(४९) १७५ पुरुष और २४० लडके १३३० दिन में जितना काम करते हैं उतना ही काम ६३० पुरुष और १००५ लड़के ३५० दिन में करते हैं, तो १ पुरुष और १ लड़के के प्रति दिन के काम का गुणोत्तर क्या होगा ?

(५०) १ पुरुष प्रति दिन १ स्त्री के डेढ गुने काम के इतना काम करता है, और १ स्त्री १ लड़के के डेढ गुने काम के इतना काम करती है, तो ८ पुरुष,

५ स्त्रियां और ५ लड़के मिल कर ३६ दिन में जितना काम करते हैं उतना काम ६ पुरुष, ३ स्त्रियां और ३ लड़के मिल कर कितने दिन में करेंगे ?

बहुराशिक (पञ्चराशिक, सप्तराशिक, नवराशिक आदि)

(१४७) दो वा अधिक गुणोत्तरों के पूर्व पदों के गुणनफल को पूर्व पद के स्थान में और उत्तरपदों के गुणनफल को उत्तरपद के स्थान में रखने से जो नया गुणोत्तर बनेगा उसको **संयुक्तगुणोत्तर** कहते हैं ।

जैसे, २ : ३; ४ : ५; ६ : ७ इन तीन गुणोत्तरों के पूर्वपद २, ४ और ६ इनका गुणनफल ४८ इसको पूर्वपद के स्थान में और उत्तरपद ३, ५ और ७ इनका गुणन फल १०५ इसको उत्तरपद के स्थान में रखने से ४८ : १०५ यह उक्त तीन गुणोत्तरों का संयुक्तगुणोत्तर कहा जाता है ।

(१४८) जब एक संयुक्तगुणोत्तर दूसरे एक साधारण गुणोत्तर के समान होता है तब उनके समत्व सम्बन्ध को **संयुक्तानुपात** कहते हैं ।

(१४९) दिये हुए पांच राशियों पर से छठवा राशि लाने के विधि को **पञ्चराशिक** कहते हैं । दो त्रैराशिकों से पञ्चराशिक के प्रश्नों का उत्तर हम ला सकते हैं । क्योंकि पञ्चराशिक में दो त्रैराशिक होते हैं । जैसे,

उदाहरण (१) १२ गायें १५ दिनों में १ एक खेत की घास खाती हैं, तो ३६ गायें ३० दिनों में कितने एकर खेत की घास खायेंगी ?

(१) त्रैराशिक—१२ गायें कुछ दिनों में (अर्थात् १५ दिनों में) १ एकर खेत की घास खाती हैं, तो ३६ गायें उतने ही समय में कितने एकर खेत की घास खायेंगी ?

यह सम त्रैराशिक होने से,

$$१२ \text{ गायें} : ३६ \text{ गायें} :: १ \text{ एकर} : \text{इष्ट एकर},$$

$$\therefore \text{इष्ट एकर} = \frac{\overset{३}{\cancel{३६}} \times १}{\cancel{१२}} = ३, \therefore ३ \text{ एकर},$$

(२) त्रैराशिक—१५ दिनों में कुछ गायें (अर्थात् ३६ गायें) ३ एकर खेत की घास खाती हैं, तो ३० दिनों में उतनी ही गायें कितने एकर खेत की घास खायेंगी ?

यह भी सम त्रैराशिक होने से,

१५ दिन : ३० दिन :: ३ एकर : इष्ट एकर,

$$\therefore \text{ इष्ट एकर} = \frac{\overset{२}{\cancel{३०}} \times ३}{\cancel{१५}} = ६, \therefore ६ \text{ एकर, उत्तर.}$$

बहुराशिक का (पञ्चराशिक, सप्तराशिक, नवराशिक आदि का) नियम

उक्त प्रश्न के ऐसे प्रश्नों का उत्तर बहुराशिक के नियम से अर्थात् पञ्चराशिक, सप्तराशिक, नवराशिक आदि के नियम से लाना हो, तो उत्तर के जाति के पद को अर्थात् प्रमाणफल को तीसरे स्थान में रखो। तब जा पद शेष रहेंगे उनमें दो दो पद एक जाति के अवश्य रहेंगे। उनमें के प्रत्येक दो सजातीय पदों में छोटे वा बड़े पद को त्रैराशिक के नियमानुसार पहिले वा दूसरे स्थान में रखो। अर्थात् प्रमाणफल से इच्छाफल अधिक हो तो बड़े पद को दूसरे स्थान में और छोटे पद को पहिले स्थान में, और प्रमाणफल से इच्छाफल कम हो तो छोटे पद को दूसरे स्थान में और बड़े पद को पहिले स्थान में रखो। तब पहिले स्थान के सब पदों के घात को पहिले स्थान में और दूसरे स्थान के सब पदों के घात को दूसरे स्थान में रखो। तब दूसरे स्थान के पदों के घात को तीसरे पद से अर्थात् प्रमाणफल से गुण दो और गुणनफल में पहिले स्थान के पदों के घात का भाग दो तो अभीष्ट उत्तर वा इच्छाफल लब्ध होगा।

जैसे ऊपर के उदाहरण में उत्तर एकर जाति का होगा इसलिये उसके सजातीय १ एकर इस पद को तीसरे स्थान में रखा। तब १२ गायें १ एकर खेत की घास नियत समय में खाती हैं तो ३६ गायें उतने ही समय में अधिक एकर खेत की घास खायेंगी। अतः उत्तर अधिक आने से १२ गायें और ३६ गायें इन दो सजातीय पदों में ३६ गायें इस बड़े पद को दूसरे स्थान में और १२ गायें इस छोटे पद को पहिले स्थान में रखा। एवं १५ दिनों में कुछ गायें १ एकर खेत की घास खाती हैं तो ३० दिनों में उतनी ही गायें अधिक एकर खेत की घास खायेंगी। अतः उत्तर अधिक आने से १५ दिन और ३० दिन इन दो सजातीय पदों में ३० दिन इस बड़े पद को दूसरे स्थान में और १५ दिन इस छोटे पद को पहिले स्थान में रखा। तब पदों का न्यास नीचे लिखे अनुसार होता है।

$$\left.\begin{array}{l}\text{१२ गायें : ३६ गायें}\\ \text{१५ दिन : ३० दिन}\end{array}\right\} \text{:: १ एकर : इष्ट एकर,}$$

अब १२ गायें : ३६ गायें, और १५ दिन : ३० दिन इन दो गुणोत्तरों से संयुक्तगुणोत्तर १२ × १५ : ३६ × ३० यह होता है तब इस संयुक्तगुणोत्तर का और १ एकर : इष्ट एकर, इस साधारण गुणोत्तर का संयुक्तानुपात नीचे लिखे अनुसार होता है।

१२ × १५ : ३६ × ३० :: १ एकर : इष्ट एकर,

अतः (१४०) प्रक्रम से, इष्ट एकर $= \dfrac{\overset{३}{\cancel{३६}} \times \overset{२}{\cancel{३०}} \times १}{\cancel{१२} \times \cancel{१५}} = ६$, ∴ ६ एकर, उत्तर,

उदाहरण (२) १५ मनुष्य एक काम २० दिनमें करते हैं, तो १० मनुष्य उस काम का तिगुना काम कितने दिनों में करेंगे ?

इस प्रश्न का उत्तर बहुराशिक के नियम से निकाला जाय तो यहां उत्तर दिन जाति का होने से तत्सजातीय २० दिन इस पद को तीसरे स्थान में रखा। अब १५ मनुष्य १ काम २० दिन में करते हैं तो वही काम १० मनुष्य अधिक दिन में करेंगे। अतः उत्तर अधिक होने से १५ मनुष्य और १० मनुष्य इन दो सजातीय पदों में १५ मनुष्य इस बडे पद को दूसरे स्थान में और १० मनुष्य इस छोटे पद को पहिले स्थान में रखा। एवं १ काम कुछ मनुष्य २० दिन में करते हैं, तो तिगुना काम उतने ही मनुष्य अधिक दिन में करेंगे। अतः उत्तर अधिक आने से १ काम और ३ काम इन दो सजातीय पदों में ३ काम इस बडे पद को दूसरे स्थान में और १ काम इस छोटे पद को पहिले स्थान में रखा। तब पदों का न्यास इस तरह से होता है:—

$$\left.\begin{array}{l}\text{१० मनुष्य : १५ मनुष्य}\\ \text{१ काम : ३ काम}\end{array}\right\} \text{:: २० दिन : इष्ट दिन,}$$

इस पर से संयुक्तानुपात का स्वरूप यह होता है:—

१० × १ : १५ × ३ :: २० दिन : इष्ट दिन,

∴ इष्ट दिन $= \dfrac{१५ \times ३ \times \overset{२}{\cancel{२०}}}{\cancel{१०} \times १} = ९०$, ∴ ९० दिन, उत्तर,

ऊपर के दोनों उदाहरण पञ्चराशिक के हैं। क्योंकि दोनों में पांच दिये हुए राशियों से छठवा राशि लाया गया है। और प्रत्येक उदाहरण का संयुक्तगुणोत्तर दो साधारण गुणोत्तरों से बना है। एवं पहिले उदाहरण का संयुक्तानुपात दो समानुपातों से बना है और दूसरे उदाहरण का संयुक्तानुपात दो ऐसे अनुपातों से बना है जिनमें पहिला व्यस्तानुपात और दूसरा समानुपात है। अब नीचे सप्त-राशिक का उदाहरण दिया जाता है जिसमें सात दिए हुए राशियों से आठवा राशि लाया जाता है। और जिसमें का संयुक्तगुणोत्तर तीन साधारण गुणोत्तरों से बनाया जाता है।

उदाहरण (३) १० मनुष्य प्रतिदिन ६ घंटा काम कर के १८ दिन में १८० रुपये कमाते हैं, तो १५ मनुष्य प्रतिदिन ८ घंटा काम कर के २४ दिन में कितने रुपये कमायेंगे?

यहां उत्तर रुपये की जाति का होगा इसलिये तत्सजातीय १८० रुपये इस पद को तीसरे स्थान में रख कर शेष पदों में से प्रत्येक दो सजातीय पदों का न्यास ऊपर कहे हुए नियम के अनुसार करना चाहिये। जैसे,

$$\left.\begin{array}{l} \text{१० मनुष्य : १५ मनुष्य} \\ \text{१८ दिन : २४ दिन} \\ \text{६ घंटा : ८ घंटा} \end{array}\right\} :: \text{१८० रुपये: इष्ट रुपये,}$$

अब पूर्व नियम से संयुक्तानुपात बनाना चाहिये। जैसे,

$$\text{१०×१८×६ : १५×२४×८ :: १८० रुपये : इष्ट रुपये,}$$

$$\therefore \text{इष्ट रुपये} = \frac{\text{१५} \times \overset{\text{४}}{\cancel{\text{२४}}} \times \text{८} \times \overset{\text{१०}}{\cancel{\text{१८०}}}}{\cancel{\text{१०}} \times \cancel{\text{१८}} \times \cancel{\text{६}}} = \text{४८०}, \quad \therefore \text{४८० रुपये, उत्तर}$$

यहां थोड़ा सा विचार करने पर यह बात ध्यान में आ सकती है कि इस उदाहरण का संयुक्तानुपात तीन समानुपातों से बना हुआ है जिससे इस उदाहरण का उत्तर तीन सम त्रैराशिकों से भी निकाला जा सकता है। इसी तरह नवरा-शिक में नौ दिये हुए राशियों से दसवा राशि लाया जाता है और नवराशिक का संयुक्तगुणोत्तर चार साधारण गुणोत्तरों से बनता है इसलिये नवराशिक का उत्तर ऊपर के नियम से अथवा चार त्रैराशिकों से भी लाया जा सकता है। एवं एका-दशराशिक में ग्यारह दिये हुए राशियों से बारहवा राशि लाया जाता है। और

उसका संयुक्त गुणोत्तर पांच साधारण गुणोत्तरों से बनने से उसका उत्तर ऊपर के नियम से अथवा पांच त्रैराशिकों से भी लाया जा सकता है। इसी तरह आगे त्रयोदशराशिक, पञ्चदशराशिकादि में भी समझना चाहिये।

उदाहरण (४) ४५ मन का बोझा १९८ मील तक ४॥≋) रु० में भेजा जा सकता है तो ७॥) रु० में कितने मन का बोझा १३२ मील तक भेजा जा सकेगा ?

यहां ४॥≋) रु० = ७५ आना और ७॥) रु० = १२० आना और मीलों की संख्या कायम रख कर जैसा बोझा बढाया जायगा वैसी मजदूरी भी बढेगी इसलिये बोझा और मजदूरी के सम्बन्ध का त्रैराशिक सम है।

अब मजदूरी कायम रख कर जैसी मीलों की संख्या कम की जायगी वैसा बोझा बढाना पड़ेगा इसलिये बोझा और मील के सम्बन्ध का त्रैराशिक व्यस्त है। यहां कितने मन यह उत्तर लाना है, अतः बहुराशिक अथवा पञ्चराशिक के नियम से,

$$\left.\begin{array}{l}\text{७५ आना : १२० आना}\\ \text{१३२ मील : १९८ मील}\end{array}\right\} :: \text{४५ मन : इष्ट मन,}$$

$$\therefore \text{इष्ट मन} = \frac{१२० \times १९८ \times ४५}{७५ \times १३२} = १०८, \therefore \text{१०८ मन, उत्तर}$$

उदाहरण (५) जब चावल का भाव रुपये को ८ सेर था तब ३० मनुष्यों को १५ रुपये के चावल १८ दिन के लिये पर्याप्त होते थे, तो जब रुपये को ६ सेर चावल मिलेंगे तब २४ रुपये के चावल २७ दिन के लिये कितने मनुष्यों को पर्याप्त होंगे ?

यहां दिन और चावल का भाव इनको कायम रखें तो जितने अधिक रुपये खर्चे जायेंगे उतने अधिक चावल मिलेंगे और उनसे अधिक मनुष्यों का पोषण होगा, अतः रुपये और मनुष्य इनके सम्बन्ध का त्रैराशिक सम है।

रुपये और चावल का भाव कायम रख कर जैसे दिन बढेंगे वैसे कम मनुष्यों का पोषण होगा, अतः दिन और मनुष्य इनके सम्बन्ध का त्रैराशिक व्यस्त है।

और दिन और रुपये इनको कायम रख कर जैसा चावल का भाव महँगा

होगा वैसे चावल कम मिलेंगे जिससे कम मनुष्यों का निर्वाह होगा, अतः चावल का भाव और मनुष्य इनके संबन्ध का त्रैराशिक व्यस्त है। यहां कितने मनुष्य यह उत्तर निकालना है, अतः बहुराशिक अथवा सप्तराशिक के नियम से,

१५ रुपये : २४ रुपये }
२७ दिन : १८ दिन } :: ३० मनुष्य : इष्ट मनुष्य,
८ सेर : ६ सेर }

$\therefore$ इष्ट मनुष्य $= \dfrac{\text{२४} \times \text{१८} \times \text{६} \times \text{३०}}{\text{१५} \times \text{२७} \times \text{८}} = \text{२४}$, $\therefore$ २४ मनुष्य, उत्तर

उदाहरण (६) २० मनुष्य ४० फूट लंबा, २० फूट चौड़ा और १० फूट गहरा तलाव २५ दिन में खोदते हैं, तो ६० मनुष्य ९० फूट लंबा ६० फू० चौड़ा और २० फू० गहरा तलाव कितने दिन में खोदेंगे ?

यहां मनुष्य और दिन इनके सम्बन्ध का त्रैराशिक केवल व्यस्त है, और लंबाई, चौडाई और गहराई इनके सम्बन्ध के तीन त्रैराशिक सम हैं। और यहां दिन निकालने हैं, इसलिये बहुराशिक अथवा नवराशिक के नियम से,

६० मनुष्य : २० मनुष्य }
४० फू० लं० : ९० फू० लं० } :: २५ दिन : इष्ट दिन,
२० फू० चौ० : ६० फू० चौ० }
१० फू० गह० : २० फू० गह० }

$\therefore$ इष्ट दिन $= \dfrac{\text{२०} \times \text{९०} \times \text{६०} \times \text{२०} \times \text{२५}}{\text{६०} \times \text{४०} \times \text{२०} \times \text{१०}} = \dfrac{\text{२२५}}{\text{२}} = \text{११२}\frac{\text{१}}{\text{२}}$,

$\therefore$ ११२ $\frac{\text{१}}{\text{२}}$ दिन, उत्तर

उदाहरणमाला (२६)

(१) १२ मनुष्य १० दिन में ३० रु० कमाते हैं तो ८ मनुष्य १५ दिन में कितने रुपये कमायेंगे ?

(२) ५ मनुष्य २० एकर जमीन की घास ७ दिन में काटते हैं तो १३ मनुष्य २१ दिन में कितने एकर जमीन की घास काटेंगे ?

(३) १४ घोड़ों को २० दिन के लिये ७ रु० की घास पर्याप्त होती है, १४ रु० की घास ८ दिन के लिये कितने घोड़ों को पर्याप्त होगी ?

(४) एक मनुष्य प्रति दिन १० घंटे चल कर ५ दिन में १६० मील जाता है तो वह प्रति दिन ८ घंटे चल कर ११ दिन में कितने मील जायगा ?

(५) १४ मनुष्य प्रति दिन ५ घंटे काम कर के एक काम ८ दिन में समाप्त करते हैं, तो ३५ मनुष्यों को प्रति दिन कितने घण्टे काम करना चाहिये जिससे वह काम ३ दिन में समाप्त हो जाय ?

(६) जब गेहूं का भाव प्रति तीन मन ८ रु० ५ आ० ४ पा० होता है, तब २७० मनुष्यों के लिये ४८ रु० के गेहूं लगते हैं, यदि गेहूँ का भाव प्रति तीन मन १० रु० हो, तो ११२ रु० के गेहूं कितने मनुष्यों के लिये पर्याप्त होंगे ?

(७) १२० सेर का बोझा २० मील तक भेजने में ५ शिलिङ्ग मजदूरी देनी पड़ती है, तो ३० मील तक ३ शिलिंग में कितना बोझा भेजा जा सकेगा ?

(८) १५०० मजदूरों को ११ मील रास्ता तैयार करने में १३ हप्ते लगते हैं, तो २४०० मजदूरों को २७$\frac{1}{2}$ मील रास्ता तैयार करने में कितने दिन लगेंगे ?

(९) ५ मनुष्य प्रति दिन ६ घण्टे काम कर के १२५ एकर जमीन की घास ४० दिन में काटते हैं, तो १८ मनुष्य प्रति दिन ५ घण्टे काम कर के ९६ दिन में कितने एकर जमीन की घास काटेंगे ?

(१०) एक २० फूट लम्बी, ४ फू० चौड़ी और ३ फू० मोटी लकड़ी की धरन का वजन ३६०० सेर हो, तो ८ फू० लम्बी, ३ फू० चौड़ी और ६ इञ्च मोटी धरन का वजन क्या होगा ?

(११) ८० मनुष्य प्रति दिन ४ घण्टे काम कर के ५० फू० लम्बा, १५ फू० चौड़ा और ८ फू० गहरा गड्ढा ६० दिन में खोदते हैं, तो ३६ मनुष्य उतना ही लम्बा, १० फू० चौड़ा और ३ फू० गहरा दूसरा गड्ढा कितने घण्टे प्रति दिन काम कर के १८ दिन में खोदेंगे ?

(१२) जब ४ पुरुषों को ७ स्त्रियों के इतनी और १ स्त्री को २ लड़कों के इतनी मजदूरी मिलती है, तब ६ पुरुष, १० स्त्रियां और १४ लड़के मिल कर ८ दिन में ५५ रु० कमाते हैं, तो उसी मजदूरी के हिसाब से ८ पुरुष और ६ स्त्रियां १० दिन में कितने रुपये कमायेंगे ?

काल, काम और गति आदि के उदाहरण

उदाहरण (१) एक मजदूर अपने लड़के से दूना काम प्रतिदिन करता है, तो जितना काम लड़का १८ दिन में करेगा उतना काम दोनों मिलकर कितने दिन में करेंगे ?

लड़का १८ दिन में जितना काम करेगा उसका $\frac{१}{१८}$ काम १ दिन में करेगा और $\frac{१}{१८}$ इसका दूना अर्थात् $\frac{१}{९}$ काम वह मजदूर १ दिन में करेगा। अतः मजदूर और लड़का इन का प्रतिदिन का काम $= \frac{१}{१८} + \frac{१}{९} = \frac{१}{६}$, अब दोनों मिल कर उस काम को कितने दिन में करेंगे यह निकालना है, इस लिये त्रैराशिक से,

$\frac{१}{६}$ काम : १ काम : : १ दिन : इष्ट दिन = ६ दिन, उत्तर,

अथवा, लड़के से दूना काम मजदूर करता है इस लिये १ मजदूर का काम = २ लड़कों का काम, और १ मजदूर और १ लड़के का प्रति दिन का काम= ३ लड़कों का प्रति दिन का काम, अब उक्त उदाहरण का स्वरूप ऐसा होगा :—
एक लड़का १ काम १८ दिन में करता है, तो ३ लड़के कितने दिन में करेंगे ? यहां लड़के अधिक इस लिये दिन कम लगेंगे, अतः यह व्यस्तत्रैराशिक होगा,

३ लड़के : १ लड़का : : १८ दिन : इष्ट दिन = ६ दिन, उत्तर,

उदाहरण (२) एक काम अ और ब मिल कर ९ दिन में करते हैं, अ और क मिल कर १२ दिन में करते हैं, ब और क मिल कर १५ दिन में करते हैं, तो तीनों मिल कर उस काम को कितने दिन में करेंगे और उनमें से प्रत्येक वह काम कितने दिन में करेगा ?

९ दिन : १ दिन : : १ काम : इष्ट काम = $\frac{१}{९}$ अ और ब का रोज का काम,
१२ दिन : १ दिन : : १ काम : इष्ट काम = $\frac{१}{१२}$ अ और क का रोज का काम,
१५ दिन : १ दिन : : १ काम : इष्ट काम = $\frac{१}{१५}$ ब और क का रोज का काम,
∴ २ अ, २ ब और २ क इन का रोज का काम $= \frac{१}{९} + \frac{१}{१२} + \frac{१}{१५} = \frac{४७}{१८०}$,
∴ अ, ब और क इन का रोज का काम $= \frac{४७}{१८०} \div २ = \frac{४७}{३६०}$,
अब तीनों मिल कर कितने दिन में करेंगे यह निकालना है, अतः

$\frac{४७}{३६०}$ काम : १ काम : : १ दिन : इष्ट दिन $= \frac{३६०}{४७} = ७\frac{३१}{४७}$ दिन, यह एक उत्तर है,

फिर, अ, ब और क इन का रोज का काम = $\frac{४७}{३६०}$ और अ और ब इनका रोज का काम = $\frac{१}{९}$

इन का अन्तर = $\frac{४७}{३६०} - \frac{१}{९} = \frac{७}{३६०}$ = क का रोज का काम, इसी प्रकार आगे करने से, अथवा अ और क इन के काम में से क का काम घटा कर और ब और क इन के काम में से क का काम घटा कर अ और ब का रोज का काम क्रम से $\frac{२३}{३६०}$ और $\frac{१७}{३६०}$ यह मालूम होगा। अब अ, ब और क इनमें से प्रत्येक को वह काम करने में कितने दिन लगेंगे, यह त्रैराशिक से निकालना चाहिये। जैसे,

$\frac{२३}{३६०}$ काम : १ काम : : १ दिन : इष्ट दिन = १५$\frac{१५}{२३}$ अ के दिन,

$\frac{१७}{३६०}$ काम : १ काम : : १ दिन : इष्ट दिन = २१$\frac{३}{१७}$ ब के दिन,

$\frac{७}{३६०}$ काम : १ काम : : १ दिन : इष्ट दिन = ५१$\frac{३}{७}$ क के दिन,

उदाहरण (३) एक हौज में २ नल लगे हैं, उनसे वह क्रम से ६ और ९ घण्टे में भर जाता है, उस को तीसरा नल भी लगा है जिस से वह हौज ४ घण्टे में खाली हो जाता है, यदि तीनों नल एक साथ खोल दिये जांय तो वह हौज कितने समय में भरेगा?

पानी भीतर लाने वाले नलों से १ घण्टे में $\frac{१}{६} + \frac{१}{९} = \frac{५}{१८}$ इतना हौज का भाग भरेगा, और पानी बाहर ले जाने वाले नल से १ घण्टे में $\frac{१}{४}$ हौज खाली होगा, इस लिये तीनों नल खोल दिये जांय तो १ घण्टे में $\frac{५}{१८} - \frac{१}{४} = \frac{१}{३६}$ हौज भरेगा, इस पर से हौज भरने का काल त्रैराशिक से लाना चाहिये, जैसे,

$\frac{१}{३६}$ हौज : १ हौज : : १ घण्टा : इष्ट घण्टे = ३६ घण्टे, उत्तर,

उदाहरण (४) अ नगर और ब नगर इन का अन्तर ४२ मील है, एक मनुष्य जिस समय अ नगर से ब नगर की ओर चला उसी समय ब नगर से अ नगर की ओर दूसरा मनुष्य रवाना हुआ, एक मनुष्य प्रति घण्टे २$\frac{१}{२}$ मील और दूसरा २$\frac{३}{४}$ मील चलता है, तो उन की भेट कब और कहां होगी? यदि वे दोनों मनुष्य दोनों नगरों से एक ही समय एक ही दिशा में चलें तो उन की भेट कब होगी?

दोनों नगरों से चलते वक्त उन दो मनुष्यों में ४२ मील का अन्तर था, यह अन्तर जब न रहेगा, तभी उनकी भेट होगी, और यह अन्तर १ घण्टे में २$\frac{१}{२}$ + २$\frac{३}{४}$ = ५$\frac{१}{४}$ मील कम होता है, इस लिये त्रैराशिक से,

$५\frac{१}{४}$ मील : ४२ मील :: १ घण्टा : इष्ट घण्टे = ८ घण्टे, अर्थात् नगरों से चलने के ८ घण्टे बाद उन की भेट होगी, और इन ८ घण्टों में $२\frac{१}{२}$ मील प्रति घण्टे चलने वाला मनुष्य ८ × $२\frac{१}{२}$ मील = २० मील चलेगा, अतः $२\frac{१}{२}$ मील चलने वाला मनुष्य जहां से चला वहां से २० मील पर उनकी भेंट होगी।

जब वे दोनों मनुष्य नगरों से एक ही दिशा में चलेंगे तो प्रति घण्टे उन दोनों के बीच का अन्तर $२\frac{३}{४} - २\frac{१}{२} = \frac{१}{४}$ मील कम होगा, अर्थात् एक मनुष्य दूसरे से $\frac{१}{४}$ मील अधिक चलता है, तब त्रैराशिक से,

$\frac{१}{४}$ मील : ४२ मील :: १ घण्टा : इष्ट घण्टे = १६८ घण्टे, अर्थात् १६८ घण्टे में उनकी भेट होगी, उत्तर,

इससे यह नियम बनता है कि विरुद्ध दिशा में जाने से गति योग से और एक ही दिशा में जाने से गति के अन्तर से त्रैराशिक करना चाहिये।

उदाहरण (५) २ और ३ बजने के बीच में घण्टे की सुई और मिनट की सुई इन दोनों के बीच में ४ मिनट का अन्तर कब होगा?

२ बजने के वक्त घण्टे की सुई घड़ी के २ इस अङ्क पर और मिनट की सुई १२ इस अङ्क पर रहती है, इस लिये इस वक्त मिनट की सुई और घण्टे की सुई इनके बीच में १० मिनट का अन्तर होता है, क्योंकि प्रत्येक दो अङ्कों के बीच में ५ मिनट का अन्तर होता है, अब घण्टे की सुई और मिनट की सुई इनके गति का गुणोत्तर ६० : ५ अथवा १२ : १ यह होने से प्रति मिनट घण्टे की सुई $\frac{१}{१२}$ मिनट चलती है, अर्थात् मिनट की सुई $१ - \frac{१}{१२} = \frac{११}{१२}$ मिनट घण्टे की सुई से अधिक चलती है।

यहां घण्टे की सुई और मिनट की सुई इन का अन्तर ४ मिनट कब होगा यह निकालना है, ठीक २ बजे दोनों सुइयों का अन्तर १० मिनट था, इस लिये मिनट के सुइ को दोनों सुइयों में का १० − ४ = ६ मिनट अन्तर कम करने के लिये कितना समय लगेगा, यह त्रैराशिक से निकालना चाहिये,

$\frac{११}{१२}$: ६ :: १ मिनट : इष्ट मिनट = $६\frac{६}{११}$ अर्थात् २ बज कर $६\frac{६}{११}$ मिनट, यह एक उत्तर है।

जब मिनट की सुई घण्टे की सुई के आगे ४ मिनट जायगी तब भी उन

दोनों में उतना ही अन्तर होगा, किन्तु इस वक्त मिनट के सुई को घण्टे की सुई से २ बजने के बाद १० + ४ = १४ मिनट अधिक चलना पड़ेगा, अतः

$\frac{११}{१२}$: १४ :: १ मिनट : इष्ट मिनट = १५$\frac{३}{११}$ अर्थात् २ बज कर १५$\frac{३}{११}$ मिनट यह दूसरा उत्तर है।

उदाहरणमाला (२७)

(१) १ मनुष्य १ काम ९ दिन में करता है और १ लड़का वही काम १५ दिन में करता है, तो दोनों एक साथ उस काम को कितने दिन में करेंगे ?

(२) एक काम अ ८ दिन में करता है, ब १२ दिन में करता है और क ६ दिन में करता है, तो तीनों मिल कर उस को कितने दिन में करेंगे ?

(३) एक मनुष्य एक काम २० दिन में करता है, किन्तु लड़के की मदद से वह उस काम को १५ दिन में करता है, तो वह लड़का उस काम को कितने दिन में करेगा ?

(४) एक हौज में २ नल लगे हैं, एक से वह हौज ३ घण्टे में भर जाता है और दूसरे से वह ४$\frac{१}{२}$ घण्टे में खाली होता है, यदि दोनों नल एक साथ खोल दिये जांय, तो वह हौज कितने समय में भरेगा ?

(५) दो मजदूर एक खेत की घास ५ दिन में काटते हैं, उन में से एक वह सब घास ८$\frac{१}{३}$ दिन में काटता है, तो दूसरा वह घास कितने दिन में काटेगा ?

(६) एक काम एक पुरुष ८ दिन में करता है और १ स्त्री ९ दिन में वही काम करती है, उन दोनों ने मिल कर ३ दिन तक वह काम किया, तो बाकी बचा हुआ काम वह पुरुष कितने दिन में समाप्त करेगा ?

(७) एक हौज में दो नल लगे हैं, एक से वह ७$\frac{१}{२}$ घण्टे में और दूसरे से ५ घण्टे में भर जाता है, उस में एक तीसरा नल भी लगा है जिससे वह ३$\frac{३}{४}$ घण्टे में खाली हो जाता है, यदि तीनों नल एक साथ खोल दिये जांय तो २$\frac{१}{२}$ घण्टे में उस हौज का कौन सा भाग भरेगा ?

(८) अ और ब १ काम ८ दिन में करते हैं, ब और क ९ दिन में करते हैं और अ और क १२ दिन में करते हैं, तो उनमें से प्रत्येक वह काम कितने दिन में करेगा ?

(९) अ और ब १ काम $३\frac{३}{४}$ घण्टे में करते हैं, अ और क $२\frac{३}{४}$ घण्ट में करते हैं और ब और क $४\frac{१}{२}$ घण्टे में करते हैं, तो तीनों मिल कर वह काम कितने घण्टे में करेंगे ?

(१०) अ, ब और क १ काम $२\frac{१८}{५९}$ दिन में करते हैं, अ और ब $३\frac{२७}{३९}$ दिन में करते हैं, ब और क $३\frac{३}{७}$ दिन में करते हैं, तो अ और ब दोनों ने मिल कर वह काम २ दिन तक करने के बाद बचा हुआ काम अ और क मिल कर कितने दिन में करेंगे ?

(११) अ और ब यह दोनों एक ही समय दो नगरों से एक दूसरे से मिलने के लिये रवाना हुए, दोनों नगरों का अन्तर ७५ मील है, अ प्रति घण्टे ३ मील और ब प्रति घण्टे $३\frac{१}{४}$ मील चलता है, तो उनकी भेट कब और कहां होगी ?

(१२) एक शहर से एक चोर चोरी करके भागा, यह खबर पोलिस को $१\frac{१}{२}$ घंटे बाद मालूम हुई, तब वह तुरंत उसका पीछा करने को चला, चोर प्रति घंटे ५ मील और पोलिस प्रति घंटे $६\frac{२}{३}$ मील चलता है, तो उनकी भेट कब और कहां होगी ?

(१३) एक स्टेशन से सुबह एक मालगाड़ी रवाना हुई और $१\frac{३}{४}$ घंटे बाद एक डाकगाड़ी रवाना हुई, यदि मालगाड़ी प्रति घंटे १२ मील और डाकगाड़ी प्रति घंटे $२२\frac{१}{२}$ मील चलती है, तो उनकी भेट कब और कहां होगी ?

(१४) चार और पांच बजने के बीच में घंटे की और मिनट की सुई में ९ मिनट का अन्तर पहिली वार कब होगा ?

(१५) तीन वजन के वक्त पर घंटे की सुई और मिनट की सुई में १५ मिनट का अन्तर होता है, तो और कितने समय में उन दोनों सुइयों में १५ मिनट का अन्तर पहिली वार होगा ?

(१६) ८ और ९ बजने के बीच में घड़ी की दोनों सुइयां एक दूसरे के सामने कब होंगी ?

(१७) ९ और १० बजने के बीच में घड़ी की दोनों सुइयों के बीच में १ मिनट का अन्तर कब होगा ?

(१८) एक घड़ी एक दिन दो पहर को १२ बजे मिलाई गई, किन्तु उसी

दिन रात को साढे छ बजे उस घड़ी में ६ बज कर ४३ मिनट हुए थे, तो वह घड़ी प्रति दिन कितना तेज चलती है ?

(१९) एक घड़ी प्रति दिन ३ मिनट सुस्त चलती है, तो दो पहर को १२ बजे उसमें क्या समय होना चाहिये, जिससे उसी दिन रात को १० बजे वह शुद्ध घड़ी के बराबर हो जाय ?

(२०) अ एक काम १५ दिन में करता है और ब वही काम १२ दिन में करता है, अने वह काम करना प्रारम्भ किया, आगे ब भी उसके साथ काम करने लगा, वह काम प्रारम्भ होने के दिन से ७$\frac{१}{२}$ दिन में समाप्त हुआ, तो अ और ब इन दोनों ने मिल कर उस काम को कितने दिन तक किया ?

ब्याज

(१५०) कर्ज में लिये हुए द्रव्य के उपयोग के बदले में जो अधिक द्रव्य नियत समय में दिया जाता है उसको **ब्याज** कहते हैं। जो कर्जा लेता है उसको **ऋणी** वा **असामी** कहते हैं। और कर्जा देनेवाले को **महाजन** कहते हैं। कर्ज में दिये हुए द्रव्य को **मूलधन** कहते हैं। और मूलधन और ब्याज मिलकर **मिश्रधन** कहा जाता है। कर्जा लेने के दिन से उसको चुकता करने के दिन तक बीच का जो काल होता है उसको **नियतकाल** कहते हैं। ब्याज की प्रति शत दर प्रत्येक सौ रुपये के लिये ठहराया हुआ ब्याज होता है। जैसे, ४ रुपये प्रति शत का अर्थ प्रत्येक सौ रुपये के लिये ४ रु० ब्याज होता है। यह ब्याज प्रायः प्रत्येक वर्ष के अन्त में दिया जाता है, इसलिये प्रति वर्ष प्रति सैकडे के हिसाब से ब्याज निकाला जाता है।

ब्याज के उदाहरण में मूलधन, नियतकाल, ब्याज की दर और मूलधन का नियतकाल का ब्याज ऐसे चार पदार्थ होते हैं। इन चार पदार्थों में से कोई तीन पदार्थों पर से चौथा पदार्थ प्रमाण गणित से लाया जाता है। जैसे, हरि ने कृष्ण से २०० रु० प्रति वर्ष ४ रुपया प्रति शत ब्याज की दर से कर्जा लिया और वर्ष के अन्त में ब्याज सहित २०८ रु० कृष्ण को दिये, तब हरी कर्जदार, कृष्ण महाजन, २०० रु० मूलधन, ४ रु० प्रति शत ब्याज की दर, १ वर्ष नियतकाल और २०८ रु० मिश्रधन है। इससे नीचे लिखे नियम बनते हैं:—

मूलधन = मिश्रधन − व्याज,

मिश्रधन = मूलधन + व्याज,

व्याज = मिश्रधन−मूलधन,

(१५१) व्याज दो प्रकार का होता है:—साधारणव्याज और चक्रवृद्धिव्याज ।

साधारण व्याज के उदाहरण त्रैराशिक से अथवा कभी कभी बहुराशिक के नियम से किये जाते हैं ।

उदाहरण (१) प्रति वर्ष ६) रु० प्रतिशत की दर से १००० रु० का ३ वर्ष का व्याज क्या होगा ?

प्रति वर्ष प्रत्येक सौ रुपये का ६ रु० व्याज है, और इस पर से १०० रु० का ३ वर्ष का व्याज पहिले निकालना चाहिये, अतः

१ वर्ष : ३ वर्ष : : ६ रु० : इष्ट रु० = १८ रु० व्याज,

१८ रु०, यह सौ रुपये का ३ वर्ष का व्याज है, और इस पर से १००० रु० का ३ वर्ष का व्याज निकालना है, अतः

१०० : १००० : : १८ रु० (व्याज) : इष्ट रु० (व्याज)

$\therefore$ इष्ट रु० = $\frac{१०००\times१८}{१००}$ = १८०, $\therefore$ १८० रु० उत्तर

अथवा, पञ्चराशिक से,

$\left.\begin{matrix} १०० \text{ रु०} : १००० \text{ रु०} \\ १ \text{ वष} : ३ \text{ वष} \end{matrix}\right\}$: : ६ रु० (व्याज) : इष्ट रु० (व्याज)

$\therefore$ इष्ट रु० = $\frac{१०००\times३\times६}{१००}$ = १८०, $\therefore$ १८० रु० उत्तर,

उदाहरण (२) प्रति वर्ष ४ प्रति शत की दर से २ साल में २४ रु० व्याज कितने मूलधन का होगा ?

१०० रु० का १ वष का व्याज ४ रु०, अतः २ वर्ष का व्याज ८ रु०, इस पर से २ साल में २४ रु० व्याज जिसका होगा वह मूलधन लाना है, अतः

८ रु० : २४ रु० : : १०० रु० : इष्ट रु० (मूलधन)

$\therefore$ इष्ट रु० = $\frac{२४\times१००}{८}$ = ३००, $\therefore$ ३०० रु० उत्तर.

अथवा, व्याज कायम रखने से मूलधन और नियतकाल व्यस्त प्रमाण में होते हैं, अतः

$$\left.\begin{matrix}\text{२ वर्ष : १ वर्ष} \\ \text{४ रु० (ब्याज) : २४ रु० (ब्याज)}\end{matrix}\right\} \text{:: १०० रु० : इष्ट रु० (मूलधन)}$$

$\therefore$ इष्ट रु० $= \frac{१ \times २४ \times १००}{२ \times ४} = ३००$, $\therefore$ ३०० रु० उत्तर.

उदाहरण (३) प्रति वर्ष ६ प्रति शत की दर से ४ वर्ष में एक मूलधन ३१ का रु० मिश्रधन होता है, तो वह मूलधन बताओ।

१०० रु० का ४ वर्ष का ब्याज २४ रु० होने से १२४ रु० मिश्रधन उसका होगा, अतः त्रैराशिक से,

१२४ रु० : ३१ रु० :: १०० रु० : इष्ट रु० (मूलधन)

$\therefore$ इष्ट रु० $= \frac{३१ \times १००}{१२४} = २५$, $\therefore$ २५ रु० उत्तर.

उदाहरण (४) प्रति वर्ष ४ प्रति शत की दर से ३६० रु० का ४५ रु० ब्याज कितने साल में होगा ?

ब्याज कायम रखने से मूलधन और नियतकाल व्यस्त प्रमाण में होते हैं, अतः पञ्चराशिक से,

$$\left.\begin{matrix}\text{३६० रु० (मूलधन) : १०० रु० (मूलधन)} \\ \text{४ रु० (ब्याज) : ४५ रु० (ब्याज)}\end{matrix}\right\} \text{:: १ वर्ष : इष्ट वर्ष,}$$

$\therefore$ इष्ट वर्ष $= \frac{१०० \times ४५ \times १}{४ \times ३६०} = \frac{२५}{८} = ३\frac{१}{८}$, $\therefore$ $३\frac{१}{८}$ वर्ष उत्तर.

उदाहरण (५) प्रति वर्ष ८ प्रति शत की दर से ६०० रु० मूलधन का ७२० रु० मिश्रधन कितने वर्ष में होगा ?

७२० रु० − ६०० रु० = १२० रु० ब्याज ६०० रु० का नियतकाल का ब्याज है, और ब्याज को कायम रखने से मूलधन और नियतकाल व्यस्त प्रमाण में होते हैं, अतः पञ्चराशिक से,

$$\left.\begin{matrix}\text{६०० रु० (मूलधन) : १०० रु० (मूलधन)} \\ \text{८ रु० (ब्याज) : १२० रु० (ब्याज)}\end{matrix}\right\} \text{:: १ वर्ष : इष्ट वर्ष,}$$

$\therefore$ इष्ट वर्ष $= \frac{१०० \times १२० \times १}{६०० \times ८} = \frac{५}{२} = २\frac{१}{२}$, $\therefore$ $२\frac{१}{२}$ वर्ष उत्तर.

उदाहरण (६) २६६ रु० १० आ० ८ पा० का २ वर्ष में ४० रु० ब्याज होता है, तो प्रति वर्ष प्रति शत की दर क्या होगी ?

२६६ रु० १० आ० ८ पा० = $२६६\frac{२}{३}$ रु० = $\frac{८००}{३}$ रु०, इस रकम का

३ वर्ष का ब्याज ४० रु० है, और इस पर से १ वर्ष का सौ रुपये का ब्याज निकालना है, अतः पञ्चराशिक से,

$$\left.\begin{matrix} \frac{\text{८००}}{\text{३}}\text{ रु० : १०० रु०} \\ \text{३ वर्ष : १ वर्ष} \end{matrix}\right\} \text{ :: ४० रु० : इष्ट रु०,}$$

$$\therefore \text{ इष्ट रु०} = \frac{\text{१००×१×४०×३}}{\text{८००×३×}} = \text{५, } \therefore \text{ ५ प्रति शत उत्तर.}$$

उदाहरण (७) ६२५ रु० का ६ महीने में ६५० मिश्रधन होता है, तो प्रति वर्ष प्रति शत ब्याज की दर बताओ।

६५० रु० − ६२५ रु० = २५ रु०, यह ६२५ रु० का ६ महीने का ब्याज है, अतः

$$\left.\begin{matrix} \text{६२५ रु० : १०० रु०} \\ \text{६ महीने : १२ महीने} \end{matrix}\right\} \text{ :: २५ रु० : इष्ट रु०,}$$

$$\therefore \text{ इष्ट रु०} = \frac{\text{१००×१२×२५}}{\text{६२५×६}} = \text{८, } \therefore \text{ ८ प्रति शत उत्तर.}$$

उदाहरण (८) एक महाजन ने एक असामी को ५०० रु० ४ वर्ष के लिये और दूसरे असामी को ६०० रु० ३ वर्ष के लिये एक ही समय एक ही ब्याज की दर से ऋण दिये, दोनों रकमों का ब्याज मिलकर १९० रु० हुआ, तो ब्याज की दर बताओ।

५०० रु० का ४ वर्ष का ब्याज जितना होगा उतना ही ५००×४ = २००० रु० का १ वर्ष का ब्याज होगा, इसी तरह ६०० रु० का ३ वर्ष का ब्याज १८०० रु० के एक वर्ष के ब्याज के तुल्य होगा, इससे (२००० रु० + १८०० रु०) = ३८०० रु० का १ वर्ष का ब्याज १९० रु० है, यह स्पष्ट है, अतः

३८०० (मूल धन) : १०० रु० (मूल धन) :: १९० रु० (ब्याज) : इष्ट रु० (ब्याज),

$$\therefore \text{ इष्ट रु०} = \frac{\text{१०० × १९०}}{\text{३८००}} = \text{५ , } \therefore \text{ ५ प्रति शत उत्तर,}$$

उदाहरणमाला (२८)

(१) प्रति वर्ष ५ प्रति शत की दर से २ साल का ५०० रु० का ब्याज निकालो।

(२) प्रति वर्ष ४ प्रति शत की दर से ३½ साल का ९५० रु० का ब्याज क्या होगा?

(३) प्रति वष ४ प्रति शत की दर से ३ साल का ७५० पौंड मूलधन का मिश्रधन क्या होगा ?

(४) प्रति वर्ष $४\frac{१}{२}$ प्रति शत की दर से ८४० पौं० ५ शि० ८ पे० का ५ वर्ष का ब्याज क्या होगा ?

(५) प्रति वर्ष $५\frac{१}{२}$ प्रति शत की दर से $२\frac{१}{२}$ वर्ष में १२५० पौं० १० शि० का मिश्र धन क्या होगा ?

(६) प्रति वर्ष ३॥) रु० प्रति शत की दर से ८६१।।।) रु० का १६ महीनों में मिश्र धन क्या होगा ?

(७) ५२० पौं० १३ शि० ४ पे० का $३\frac{१}{२}$ वष में प्रति वर्ष $४\frac{१}{२}$ प्रति शत की दर से ब्याज और मिश्रधन निकालो ।

(८) प्रति वर्ष $३\frac{३}{४}$ प्रति शत की दर से $८\frac{४}{६}$ वष का १९८ पौं० १७ शि० का ब्याज क्या होगा ?

(९) ९१४ पौं० १२ शि० ६ पे० का प्रति वष $३\frac{१}{६}$ प्रति शत की दर से $३\frac{३}{४}$ वर्ष में मिश्रधन क्या होगा ?

(१०) प्रति वर्ष ४ प्रति शत की दर से ३ वष में ४६४ पौं० ६ शि० ८ पे० मिश्रधन कितने मूलधन का होगा ?

(११) प्रति वर्ष $३\frac{१}{२}$ प्रतिशत की दर से २ वष में २५ पौं० ६ शि० ब्याज कितने मूलधन का होगा ?

(१२) ४३३ पौं० ६ शि० ८ पे० मूलधन का २ वष में ४४७ पौं० १५ शि० मिश्रधन होने के लिये प्रतिवर्ष प्रतिशत ब्याज की दर बताओ ।

(१३) प्रतिवर्ष ५ प्रतिशत की दर से ४५४ पौं० ३ शि० ४ पे० मूलधन का ५०० पौं० मिश्रधन कितने साल में होगा ?

(१४) प्रति वर्ष $२\frac{१}{८}$ प्रति शत की दर से $३\frac{१}{२}$ वर्ष में ८६ रु० १२ आ० ब्याज कितने मूलधन का होगा ?

(१५) प्रतिवर्ष ४ प्रतिशत की दर से ५३७ पौं० ११ शि० $९\frac{५}{१३}$ पे० इस मूलधन का दूना मिश्रधन कितने साल में होगा ?

(१६) कितने प्रति शत ब्याज की दर से एक धन का ब्याज २० वष में उसका दूना हो जायगा ?

(१७) २० प्रतिशत ब्याज की दर से कोई धन कितने समय में अपना ३ गुना हो जायगा ?

(१८) किसी मूलधन का प्रतिवर्ष ४ प्रतिशत की दर से ५½ वर्ष में १२२० पौं० मिश्रधन होता है, तो उसी मूल धन का प्रति वर्ष ६¼ प्रति शत की दर से ८ वर्ष में कितना मिश्रधन होगा ?

(१९) जिस दर से १७६ पौं० ५ शि० मूलधन का १९७ पौं० ८ शि० मिश्रधन ४ वर्ष में होता है, उसी दर से १०७५ पौं० १० शि० मूलधन का १५५९ पौं० ९ शि० ६ पे० मिश्रधन कितने वर्ष में होगा ?

(२०) किसी मूलधन का ५ वर्ष में ९६० रु० मिश्रधन होता है, और उसी मूलधन का ८ वर्ष में उसी ब्याज की दर से १०५६ रु० मिश्रधन होता है, तो उस मूलधन को और ब्याज की दर को बताओ।

श्रीमद्गणकधुरन्धरबापूदेवस्य पण्डितेन्द्रस्य ।
तनयो गणपतिशास्त्री पूर्वार्द्धं गणितकौमुद्याः ॥ १ ॥
विनिबद्ध्य रुचिरमादौ गणिते बालप्रवेशाय ।
भागं द्वितीयमधुना विदुषां करयोः समर्पयति ॥ २ ॥

इति शम्

द्वितीय भाग समाप्त

शुद्धिपत्र

पृष्ठ संख्या	पंक्ति संख्या	शुद्ध	अशुद्ध
७	१९	किन्तु ७ में	किन्तु ९ में
४९	४	$१५१\frac{३}{१०}$ पौं० में	$१५१\frac{६}{१०}$ पौं० में
७३	१६	$\frac{१}{८}$ जोड़ने से	, १ जोड़ने से
७६	१६	५० पेड़ हैं	पेड़ हैं

प्राप्तिस्थानम्—

चौखम्बा—संस्कृत—पुस्तकालय,

बनारस सिटी ।

उत्तरमाला ।

उदाहरणमाला (१) ८ पृष्ठ से ९ पृष्ठ तक

(१) २, ३ (२) ३, ५, ९ (३) २, ३, ४, ९ (४) २, ३, ४, ५, १० (५) २, ३, ४, ११ (६) २, ११ (७) २, ३, ५, १० (८) २, ४ (९) कोई नहीं (१०) ५ (११) २, ४, ५, ८, १० (१२) ३, ९ (१३) ३, ११ (१४) २, ३ (१५) २, ३, ५, ९, १० (१६) ७, ११, १३ (१७) ११ (१८) ७, १३ (१९) कोई नहीं (२०) ७, ११, १३ (२१) ६७ (२२) २३, २९ (२३) ८९ (२४) १६७ (२५) १७, ५३ (२६) ७, ४३ (२७) २९ × ३ × ७ × २ × २ × २ × १३ (२८) ४१ × ५ × १३ × ११ × ३ (२९) ३१ × १३ × ११ × २ × ३ × ५ (३०) ३ × ३ × ३ × ३ × ५ × २ × १९ (३१) २३ × ११ × १३ × ७ × ३ × २ × २ (३२) २, ३, ६ (३३) १४८, १९६ यह यौगिक संख्याएँ और बाकी की रूढ संख्याएँ हैं (३४) १३ (३५) १०३, ९८३ (३६) ३ से पूरी विभाजित होने से (३८) ९९० (३९) हां, २ (४०) ५ × ५ × ५, ६ × ६, ७ × ७ × ७, ११ × ११, १० × १० × १० × १० × १०,

उदाहरणमाला (२) १२ पृष्ठ से १३ पृष्ठ तक

(१) २४ (२) ६ (३) १२ (४) ४३७ (५) २५९ (६) ४ (७) ११ (८) ६ (९) ३ (१०) १३ (१२) २७२, ६२८ (१३) १२१ (१४) १२३ लड़के (१५) ६८ पात्र (१६) ४९४, ५१३ (१७) १७ हाथ (१८) १३ सेर की (२०) १० आम

उदाहरणमाला (३) पृष्ठ १८ से पृष्ठ १९ तक

(१) ३९६ (२) १८१४९३ (३) १२० (४) १३५० (५) ७२० (६) ४६२ (७) २६७७५० (८) ४४१००० (९) ३६०५४०१८०० (१०) ६६६६६६ (११) २५२ (१२) १०५ (१३) ६२९८५ (१४) २५२३ (१५) ५८ (१६) १२६० (१७) १०८०, १२६०, १४४० (१८) ५८० (१९) ३४५५ (२०) ७२ मिनट (२१) १ घं० ६ मि०

(२२) २१ फु० ६ इ० (२३) १९१२ मह०, १७६६६८८ लघु० (२४) २० मिनट (२५) ४२०

उदाहरणमाला (४) २३ पृष्ठ से २४ पृष्ठ तक

(१) $\frac{३}{४}$, $\frac{७}{१०}$, $\frac{१३}{६०}$, $\frac{१९}{१५३}$, $\frac{२४०}{३५९१}$ (२) छ बटे ग्यारह, अठ्ठारह बटे इकतीस, एक सौ ग्यारह बटे दो सौ पैंतीस, तीन सौ नवासी बटे नौ सौ सतहत्तर, बारह सौ पैंतीस बटे नौ हजार आठ सौ छिहत्तर (३) $\frac{११}{१}$, $\frac{१२}{१}$, $\frac{१३}{१}$, $\frac{१४}{१}$, $\frac{१५}{१}$ (४) $\frac{३}{४}$ (५) ५ रु० ४ आ० (६) २ म० २० से० (७) १ तो० (८) ३ गज (९) ११०० यार्ड (१०) २५ (११) $\frac{३}{८}$ दिन (१२) $\frac{३३}{४०}$ मन (१३) $\frac{१९}{३६०}$ (१४) ४ रु० १३ आ० (१५) ६ रु० (१६) $\frac{३४}{३३}$, $\frac{११}{२०}$, $\frac{११}{१५}$, $\frac{११}{१०}$, $\frac{११}{५}$, $\frac{११}{४}$, $\frac{११}{३}$ (१७) $\frac{५}{११९}$, $\frac{३०}{८३}$, $\frac{२०}{८३}$, $\frac{१५}{८३}$, $\frac{१२}{८३}$, $\frac{१०}{८३}$

उदाहरणमाला (५) २७ पृष्ठ

(१) $\frac{१५५}{३१}$, $\frac{१८६}{३१}$, $\frac{३४१}{३१}$, $\frac{५२७}{३१}$ (२) $\frac{६५}{५}$, $\frac{१०४}{८}$, $\frac{१८२}{१४}$, $\frac{२४७}{१९}$ (३) $\frac{६}{१२}$, $\frac{८}{१२}$, $\frac{१०}{१२}$ | $\frac{३०}{६०}$, $\frac{४०}{६०}$, $\frac{५०}{६०}$ | $\frac{३६}{७२}$, $\frac{४८}{७२}$, $\frac{६०}{७२}$ | $\frac{१५०}{३००}$, $\frac{२००}{३००}$, $\frac{२५०}{३००}$ (४) $\frac{३}{७}$, $\frac{७}{१०}$, $\frac{२}{१६}$, $\frac{५}{१८}$ (५) $\frac{५}{८}$, $\frac{३}{८}$, $\frac{३}{८}$, $\frac{४}{८}$

उदाहरणमाला (६) २७ पृष्ठ

(१) $\frac{१३}{४}$ (२) $\frac{१९}{३}$ (३) $\frac{२३}{२}$ (४) $\frac{५३}{८}$ (५) $\frac{६९}{७}$ (६) $\frac{३०५}{१८}$ (७) $\frac{४८१}{२३}$ (८) $\frac{९९}{८}$ (९) $\frac{५९}{३}$ (१०) $\frac{१.०७}{४}$ (११) $\frac{३०९७}{५६}$ (१२) $\frac{३७२१}{११२}$ (१३) $\frac{४६७२५}{३९५}$ (१४) $\frac{७७६१४}{१९५}$ (१५) $\frac{४४६१०९}{८९५}$

उदाहरणमाला (७) २८ पृष्ठ

(१) $६\frac{३}{४}$ (२) $६\frac{१}{८}$ (३) $६\frac{७}{९}$ (४) $८\frac{७}{११}$ (५) $७\frac{११}{१६}$ (६) १७ अभिन्नसंख्या (७) $७\frac{५९५}{१०००}$ (८) $१८\frac{७}{२९७}$ (९) $२७\frac{७५}{३५८७}$ (१०) १९८ अ० सं० (११) $१\frac{३३३}{६५८४}$ (१२) $२५६\frac{५}{८९७}$ (१३) $६४\frac{३०३}{४५८७}$ (१४) २३ अ० सं० (१५) $७९\frac{१६३९}{७९२५}$

उदाहरणमाला (८) २९ पृष्ठ से ३० पृष्ठ तक

(१) $\frac{१}{२}$ (२) $\frac{५}{८}$ (३) $\frac{३}{१०}$ (४) $\frac{३}{४}$ (५) $\frac{४}{१५}$ (६) $\frac{४५}{१४}$ (७) $\frac{४}{७}$ (८) $\frac{५०}{३}$ (९) $\frac{६१}{२}$ (१०) $\frac{७७४४}{२७}$ (११) $\frac{४७}{२०}$ (१२) $\frac{५}{३४}$ (१३) $\frac{१}{१०}$ (१४) १ (१५) २९४

उदाहरणमाला (९) ३१ पृष्ठ से ३२ पृष्ठ तक

(१) $\frac{१}{७}$ (२) $\frac{३}{५}$ (३) $\frac{८}{१७}$ (४) $\frac{१४}{६५}$ (५) $\frac{३४}{३५}$ (६) $\frac{३२}{६१}$ (७) $\frac{१}{२४}$ (८) $\frac{१५}{१९}$ (९) $\frac{५}{९}$ (१०) $\frac{७}{११}$ (११) $\frac{९}{३२}$ (१२) $\frac{३२}{४३}$ (१३) $\frac{८५१}{९४०}$ (१४) $\frac{११९}{११७}$ (१५) $\frac{२}{७}$ (१६) $\frac{२३}{६७}$ (१७) $\frac{१}{११}$ (१८) $\frac{७५७}{३३३०}$ (१९) $\frac{१}{७}$ (२०) $\frac{१०}{१३}$ (२१) $\frac{१}{२}$ (२२) $\frac{६}{११}$ (२३) $\frac{१}{३}$ (२४) $\frac{३}{४}$ (२५) $\frac{१}{६}$

उदाहरणमाला (१०) ३३ पृष्ठ

(१) $\frac{२१}{३५}$ $\frac{३०}{३५}$ (२) $\frac{४५}{६०}$, $\frac{४८}{६०}$, $\frac{५०}{६०}$ (३) $\frac{९०}{१२६}$, $\frac{९८}{१२६}$, $\frac{९९}{१२६}$, (४) $\frac{२०७६}{३४६५}$, $\frac{२४७५}{३४६५}$, $\frac{१५४०}{३४६५}$, $\frac{६३०}{३४६५}$, (५) $\frac{७५}{२१०}$, $\frac{२०}{२१०}$, $\frac{७८}{२१०}$, $\frac{४०}{२१०}$ (६) $\frac{१२६०}{२१६०}$, $\frac{१२१५}{२१६०}$, $\frac{१४०४}{२१६०}$, $\frac{४००}{२१६०}$ (७) $\frac{५३९}{१३८६}$, $\frac{५६७}{१६८६}$, $\frac{२४२}{१३८६}$, $\frac{३६}{१३८६}$ (८) $\frac{३४०}{२८६०}$, $\frac{६१६}{२८६०}$, $\frac{६२४}{२८६०}$, $\frac{६०५}{२८६०}$ (९) $\frac{२९२५}{१४०४०}$, $\frac{१२१५}{१४०४०}$, $\frac{९६०}{१४०४०}$, $\frac{१५२१}{१४०४०}$, $\frac{१७६८}{१४०४०}$ (१०) $\frac{२००२०}{२१८४०}$, $\frac{२०१६०}{२१८४०}$, $\frac{२०२८०}{२१८४०}$, $\frac{२०३८४}{२१८४०}$ (११) $\frac{११७०}{२३१०}$, $\frac{१३८६}{२३१०}$, $\frac{१४८५}{२३१०}$, $\frac{७७०}{२३१०}$, $\frac{९२४}{२३१०}$ $\frac{९९०}{२३१०}$ (१२) $\frac{१४}{५}$, $\frac{४}{५}$, $\frac{४०}{५}$ (१३) $\frac{९९४५}{३३१५}$, $\frac{२३८}{३३१५}$, $\frac{२२५}{३३१५}$, $\frac{२०८}{३३१५}$ (१४) $\frac{३६०}{१५१२०}$ $\frac{३३६}{१५१२०}$, $\frac{३१५}{१५१२०}$, $\frac{२८०}{१५१२०}$, $\frac{२७०}{१५१२०}$, $\frac{२४०}{१५१२०}$, $\frac{२१०}{१५१२०}$, (१५) $\frac{१३३१}{२३१०}$, $\frac{३४३}{२३१०}$, $\frac{१२५}{२३१०}$, $\frac{८}{२३१०}$

उदाहरणमाला (११) ३६ पृष्ठ

(१) $\frac{८}{९}$ बड़ी, $\frac{४}{५}$ छोटी (२) $\frac{६}{७}$ बड़ी, $\frac{३}{१४}$ छोटी (३) $\frac{१}{२}$ बड़ी, $\frac{१}{३}$ छोटी (४) $\frac{३}{७}$ बडी, $\frac{२}{५}$ छोटी (५) $\frac{३}{७}$ बडी, $\frac{३}{४}$ का $\frac{८}{१८}$ छोटी (६) २$\frac{१}{२}$ बडी, २$\frac{१}{३}$ का $\frac{४}{५}$ छोटी (७) $\frac{१२}{१३}$ बडी, $\frac{३}{१६}$ छोटी (८) $\frac{१}{५}$, $\frac{३}{१४}$, $\frac{८}{३७}$, $\frac{५}{२३}$, $\frac{२}{९}$ उत्तरोत्तरबडी (९) $\frac{१७}{४०}$, $\frac{११}{३०}$, $\frac{२५}{५६}$, $\frac{१९}{४२}$, $\frac{१६}{३५}$, $\frac{२३}{४८}$ (१०)

$\frac{५}{१२}$ और $\frac{११}{२१}$ यह $\frac{३१}{७५}$ से बडी और वाकी सब छोटी हैं (११) $\frac{१}{१६}$ शीशी पीने वाला वालक

उदाहरणमाला (१२) ३९ पृष्ठ से ४० पृष्ठ तक

(१) $\frac{७}{८}$ (२) १$\frac{५}{१२}$ (३) $\frac{५}{१६}$ (४) ८$\frac{१}{६}$ (५) ८$\frac{१५}{२८}$ (६) $\frac{७१}{१०५}$ (७) २$\frac{८३}{१२०}$ (८) १ (९) $\frac{२}{३}$ (१०) $\frac{५}{६}$ (११) २$\frac{९}{११}$ (१२) $\frac{४}{५}$ (१३) $\frac{९}{१३}$ (१४) ३$\frac{४}{५}$ (१५) १८$\frac{११}{२०}$ (१६) ६०$\frac{१४१७}{२५२०}$ (१७) $\frac{२४७}{२५६}$ (१८) ३४$\frac{१२}{२५}$ (१९) ७ पौं० १९ शि० $\frac{९}{१६}$ पे० (२०) $\frac{३}{४}$ (२१) $\frac{१९}{२८}$

उदाहरणमाला (१३) ४३ पृष्ठ

(१) $\frac{१}{२}$ (२) $\frac{१}{४}$ (३) $\frac{२}{११७}$ (४) $\frac{१}{१५}$ (५) $\frac{४}{४५}$ (६) १$\frac{१०९}{२२८}$ (७) ३$\frac{७}{१०}$ (८) $\frac{१८१}{४०६}$ (९) ६$\frac{१३}{२०}$ (१०) ११$\frac{२}{१५}$ (११) ७$\frac{१०१}{११५}$ (१२) ८$\frac{५७७}{१२३६}$ (१३) १६० (१४) १४$\frac{१}{४५}$ (१५) ९$\frac{६४}{८१}$ (१६) १०$\frac{२२३}{२७३}$ (१७) ९$\frac{५५}{५६}$ (१८) ६$\frac{१९}{२१}$ (१९) ९$\frac{९}{११}$ (२०) १०$\frac{१}{२१}$ (२१) $\frac{१}{८}$ (२२) $\frac{१}{९०}$ (२३) $\frac{१}{११७}$ (२४) $\frac{२}{१३}$ (२५) ४ (२६) ४ रु० ४ आ० ३$\frac{७}{८}$ पा० (२७) ५ रु० १५ आ० $\frac{४}{७}$ पा० (२८) १० पौं० ९ शि० ५$\frac{७}{१६}$ पे० (२९) ३६ (३०) $\frac{७}{३६}$

उदाहरणमाला (१४) ४५ पृष्ठसे ४६ पृष्ठ तक

(१) $\frac{२}{५}$, $\frac{२}{३}$, $\frac{४}{५}$, १$\frac{१}{३}$ (२) ४$\frac{११}{१५}$, ५$\frac{११}{१२}$, ९$\frac{७}{१५}$, १०$\frac{१३}{२०}$ (३) १४$\frac{३}{४}$, १९$\frac{२}{३}$, २९$\frac{१}{२}$, ३९$\frac{१}{३}$ (४) १०$\frac{१}{५}$, २३$\frac{४}{५}$, ५१, ६१ (५) ४$\frac{३}{८}$, १३$\frac{१}{८}$, १९$\frac{१}{१६}$, ६१$\frac{१}{४}$ (६) १३$\frac{१}{३}$ (७) ३८६$\frac{१}{१०}$ (८) ३१९०$\frac{२}{५}$ (९) ८९९$\frac{९१}{१००}$ (१०) ६३९९$\frac{७१}{७३}$ (११) $\frac{१}{१२}$ (१२) $\frac{५}{८}$ (१३) १$\frac{१}{२}$ (१४) ३$\frac{२}{३}$ (१५) ८ (१६) ७९$\frac{५}{८}$ (१७) $\frac{२५}{१२१}$ (१८) $\frac{१}{१२}$ (१९) $\frac{५}{२४}$ (२०) २८ (२१) २७$\frac{३}{१०}$ मील (२२) $\frac{११}{१५}$ (२३) $\frac{२}{९}$ (२४) ३२६ रु०

उदाहरणमाला (१५) ४८ पृष्ठ से ४९ पृष्ठ तक

(१) ९$\frac{१}{३}$ (२) २४ (३) १$\frac{१}{९}$ (४) ६$\frac{१६}{३१}$ (५) $\frac{१६०}{१८९}$ (६) $\frac{१९७३४}{२१६७९}$ (७) २१$\frac{१}{५}$ (८) $\frac{६}{७}$ (९) ५३७ (१०) ३$\frac{११}{१५}$ (११) १$\frac{१९}{४५}$ (१२) २$\frac{१}{१०}$ (१३) $\frac{१}{२}$ (१४) १$\frac{१}{३०}$ (१५) $\frac{१६}{२१}$ (१६) ४$\frac{१}{१४}$ (१७)

१५ (१८) ६ (१९) $\frac{५}{१४}$ (२०) ९ पुस्तक (२१) १७ घोडे (२२) ५ घं० २० मि० (२३) २४०० चक्कर (२४) $\frac{३}{४}$ (२५) ९$\frac{१}{३}$ (२६) $\frac{५}{२४}$ (२७) $\frac{१३}{२०}$ (२८) १$\frac{१}{२}$ (२९) $\frac{३}{४}$ (३०) $\frac{१}{३०}$ (३१) २$\frac{१}{४}$ (३२) $\frac{२}{१३}$ (३३) १$\frac{९}{६१}$ (३४) ५$\frac{१७}{२२२}$ (३५) १

उदाहरणमाला (१६) ५० पृष्ठ

(१) $\frac{१}{३५}$ (२) $\frac{१}{४४}$ (३) $\frac{१}{१२६}$ (४) $\frac{१}{१२०}$ (५) $\frac{१}{१२}$ (६) १$\frac{१}{२}$ (७) $\frac{१}{१५०}$ (८) $\frac{१}{४२०}$ (९) $\frac{७}{८५८०}$

उदाहरणमाला (१७) ५१ पृष्ठ

(१) १४$\frac{३}{५}$ (२) ५$\frac{५}{७}$ (३) १४० (४) ३० (५) १२६ (६) २४ (७) १८$\frac{६}{७}$ (८) १४६$\frac{२}{३}$ (९) ४४५८$\frac{६}{१३}$

उदाहरणमाला (१८) ५७ पृष्ठ से ५८ पृष्ठ तक

(१) ० (२) $\frac{३}{१६}$ (३) २७$\frac{३}{१०}$ (४) २$\frac{७}{१२}$ (५) १$\frac{५}{८}$ (६) ३$\frac{१७}{२४}$ (७) १६ (८) ३$\frac{१६}{२१}$ (९) ५$\frac{१}{३८}$ (१०) ३$\frac{३५}{७२}$ (११) ३$\frac{१९}{४०}$ (१२) १ (१३) १६$\frac{५}{३१}$ (१४) $\frac{१}{२}$ (१५) ७

उदाहरणमाला (१९) ६० पृष्ठ से ६१ पृष्ठ तक

(१) $\frac{४}{११}$ (२) $\frac{१३}{३०}$ (३) १० (४) ३$\frac{३९}{४१}$ (५) २ (६) $\frac{५}{१३}$ (७) $\frac{१९३}{२०१}$ (८) $\frac{२५}{२०८}$ (९) $\frac{१}{१६}$ (१०) १$\frac{२}{३}$ (११) १$\frac{६४}{३२१}$ (१२) २$\frac{२३}{६७}$

उदाहरणमाला (२०) ६३ पृष्ठ से ६५ पृष्ठ तक

(१) $\frac{३}{८}$ (२) $\frac{१८}{२५}$ (३) १ (४) $\frac{१४२४}{३७२५}$ (५) १$\frac{४}{३२१}$ (६) १$\frac{७३}{९०}$ (७) ९$\frac{३}{८}$ (८) १३$\frac{२}{३}$ (९) २$\frac{२३}{२६}$ (१०) $\frac{१७}{२०}$ (११) $\frac{११३२}{११४१}$ (१२) ५$\frac{३८९}{७६३}$ (१३) $\frac{१४}{६५}$ (१४) ११$\frac{५०}{१११}$ (१५) ६ (१६) ६$\frac{११}{२४}$ (१७) ३७$\frac{४९}{१५०}$ (१८) १$\frac{९}{१०}$ (१९) $\frac{४१}{१८०}$ (२०) ९$\frac{९}{१४}$ (२१) ३$\frac{३}{१०}$

उदाहरणमाला (२१) ६६ पृष्ठ से ६७ पृष्ठ तक

(१) १२ आना (२) ७ पौं० १६ शि० (३) ५ मा० ५ र० (४)

५ घं० ४६ मि० ४० से० (५) १ प्रहर $३\frac{३}{४}$ घटी (६) ५७ मिनट (७) १०५ वर्ग या० ७ वर्ग फू० १२६ वर्ग इ० (८) ३० वर्ग पोल (९) १६ शि० ८ पे० (१०) २५ पौंड (११) १५ सेर (१२) १०० यार्ड (१३) $५\frac{१}{३}$ अंगुल (१४) ११ रु० ९ आ० (१५) २५ रु० ९ पा० (१६) ६९ रु० १ आ० २ पैसा (१७) २३ पौं० १० शि० ९ पे० (१८) २१ पौं० १९ शि० $६\frac{३}{४}$ पे० (१९) ९ म० १ से० १३ छ० (२०) ७९ वर्ष २५४ दि० १० घं० (२१) ८९ ग० १ फू० ९ इ० (२२) ९० तो० ३ मा० २ र० (२३) $१\frac{१}{३}$ आना (२४) १२५ रु० (२५) २१ मील १२५ गज

उदाहरणमाला (२२) ६८ पृष्ठ से ७० पृष्ठ तक

(१) $\frac{१}{२४}$ रु० (२) $\frac{७}{८०}$ पौं० (३) $\frac{१}{१६}$ तो० (४) $\frac{१}{३२००}$ दिन (५) $\frac{१}{६}$ दिन (६) $\frac{१}{११}$ मील (७) $\frac{१}{३}$ रु० (८) $\frac{२}{३}$ पौं० (९) $४\frac{३}{१०}$ मन (१०) $\frac{७}{२४}$ तो० (११) $\frac{२२}{३}$ (१२) $\frac{१०}{३}$ (१३) $\frac{९}{१०}$ (१४) $\frac{३१}{३०२}$ (१५) $\frac{५}{३४}$ (१६) $\frac{३०}{४९७}$ (१७) $\frac{३२}{३}$ (१८) $\frac{१}{४०}$ (१९) $\frac{८}{९९}$ (२०) $\frac{१}{४}$ (२१) $\frac{६४}{१२८९}$ (२२) $\frac{१}{२}$ (२३) $\frac{५३}{२१}$ (२४) $\frac{३५}{५३}$ (२५) $\frac{९३}{१५५}$

विविध उदाहरणमाला (२३) ७३ पृष्ठ से ८६ पृष्ठ तक

(१) २ (२) $२\frac{१}{२}$ (३) $४\frac{१}{६}$ (४) $१\frac{२७}{६८}$ (५) $\frac{१}{३५}$ (६) ५ (७) ९ (८) $\frac{१३}{४८}$ (९) १ (१०) $\frac{७}{४०}$, $\frac{९}{४०}$, $\frac{११}{४०}$, $\frac{१३}{४०}$ (११) ३६ (१२) $\frac{१०}{३०}$ (१३) $१\frac{४९}{५१}$ (१४) $\frac{३}{८}$ (१५) $\frac{११}{९}$, $४२\frac{७}{९}$ (१६) $१५\frac{४३}{६०}$, $१०\frac{५३}{६०}$ (१७) मजदूर, $\frac{१}{२४}$, $\frac{५}{२४}$ (१८) ४१५८ रु० (१९) १४ रु०, ९१ रु० (२०) ४९ रु० ३ आ० ८ पा० (२१) ४८७ रु० ३ आ० २ पा० (२२) १४४ रु० (२३) ११० (२४) २५ बीघा (२५) ७५००० रु० (२६) ३० फीट (२७) $\frac{११}{३०}$ (२८) २४० (२९) $\frac{३}{८०}$ (३०) १० पा० (३१) ४५६ पा०; $४०८८\frac{८}{९}$ छटां० (३२) ४०१ तो० ८ मा० $७\frac{१९}{३२}$ र० (३३) ७ रु० ७ आ० ३ पा० (३४) $५\frac{१}{६}$ (३५) ७६ (३८) १५ (३९) ८४ (४०) ९९९ (४१) २ पौं० १० शि० (४२) ३६९३ पौं० १५ शि० (४३) $\frac{७६५}{३४५७}$

(४४) १५६८० रु० (४५) १६ रु० १३ आ० २ पा० (४६) १५ फल (४७) ६०० पेड (४८) १॥) रु० (४९) ३६ रु० (५०) ५६४ यात्री

उदाहरणमाला (२४) ७६ पृष्ठ से ८० पृष्ठ तक

(१) ३४ (२) ३९० (३) १९५ (४) दूसरा (५) चौथा (६) २५$\frac{३}{५}$ (७) १ फ़ू० २ इञ्च (८) ४, ३, १०४ (९) ४ रु० ८ आ० (१०) ४ रु० १० आ०

उदाहरणमाला (२५) ८६ पृष्ठ से ९२ पृष्ठ तक

(१) १०१$\frac{३}{८}$ दिन (२) २८ एकर (३) ३ रु० ८ आ० ५$\frac{७}{१९}$ पा० (४) ९७३ रु० १५ आ० ४ पा० (५) १४१४ बैल (६) ६ फ़ू० ६$\frac{२}{३}$ इ० (७) ७$\frac{१}{१७}$ आने (८) २४०० पौं० (९) ७०२३ रु० १० आ० ८ पा० (१०) ९$\frac{३}{८}$ पा० (११) १०० रुपये (१२) ११ बजकर ३३ सेकण्ड (१३) १७$\frac{११}{१७}$ सेकण्ड (१४) ८ बजकर ५ मि० ४९$\frac{१}{११}$ से० (१५) ६२$\frac{१}{२}$ दिन (१६) $\frac{७५}{९२}$ सेर (१७) १८ मनुष्य (१८) १२ रु० (१९) २ माशा (२०) १४० टोकरी (२१) २$\frac{२}{३}$ दिन (२२) ५० दिन (२३) २५ सेर (२४) ३७$\frac{१}{२}$ (२५) १$\frac{१}{२}$ सेकण्ड (२६) ७$\frac{१}{८}$ दिन (२७) ६$\frac{९}{१९}$ दिन (२८) २० सेर (२९) ७५०० रु० (३०) १९$\frac{३५१}{८२८}$ मील (३१) १८ सेर (३२) २० रु० (३३) ६३ रु० २ आ० ९$\frac{३}{१३}$ पा० (३४) ६$\frac{६}{७}$ दिन; पुरुष १।) रु०, लडका ॥)।१ (३५) ५१. ताव (३६) अ २४० रु०, व ३३६ रु० (३७) ४५ रु० (३८) २$\frac{११}{१२}$ दिन (३९) ५$\frac{१}{७}$ घंटे (४०) ९४ रु०, ३५ रु० (४१) ८ सेर (४२) १$\frac{३}{८}$ सेर (४३) ४ रु० मन (४४) २७ रु० ३ आ० ४$\frac{२}{३}$ पा० (४५) ४४० मील (४६) ८$\frac{३}{८}$ दिन (४७) ८ दिन (४८) ४६ रु० ८ आ० (४९) ९३ : ३५ (५०) ५२$\frac{३}{७}$ दिन

उदाहरणमाला (२६) ९७ पृष्ठ से ९८ पृष्ठ तक

(१) ३० रु० (२) १५६ एकर (३) ८० घोडे (४) २८१ $\frac{३}{८}$ मील (५) ५$\frac{१}{३}$ घंटे (६) ५२५ मनुष्य (७) ४८ सेर (८) १४२ $\frac{३}{१६}$ दिन (९) ९०० एकर (१०) १८० सेर (११) ७$\frac{११}{३७}$ घंटे (१२) ५० रु०

उदाहरणमाला (२७) पृष्ठ १०२ से १०४ पृष्ठ तक

(१) ५$\frac{५}{८}$ दिन (२) २$\frac{२}{३}$ दिन (३) ६० दिन (४) ९ घंटे (५) १२$\frac{१}{२}$ दिन (६) २$\frac{१}{३}$ दिन (७) $\frac{१}{६}$ हौज (८) अ २०$\frac{४}{७}$ दि०; ब १३ $\frac{१}{११}$ दि०, क २८ $\frac{४}{५}$ दि० (९) २$\frac{७३}{२११}$ घण्टे (१०) १$\frac{११}{१८}$ दि० (११) १२ घण्टे ; ३६ मील पर अ के नगरसे (१२) ४$\frac{१}{२}$ घंटे ; ३० मील पर (१३) २ घंटे ; ४५ मील पर (१४) ४ बज कर १२ मिनट (१५) ३ बज कर ३२$\frac{८}{११}$ मिनट (१६) ८ बज कर १०$\frac{१०}{११}$ मिनट (१७) ९ बज कर ४८ मिनट और ५०$\frac{३}{११}$ मिनट (१८) ४८ मिनट (१९) १२ बजने में १$\frac{१}{४}$ मिनट कम (२०) ६ दिन

उदाहरणमाला (२८) १०७ पृष्ठ से १०६ पृष्ठ तक

(१) ५० रु० (२) १३३ रु० (३) ८४० पौं० (४) १८९ पौं० १ शि० ३$\frac{३}{१०}$ पे० (५) १४२२ पौं० ८ शि० १०$\frac{१}{२}$ पे० (६) ९०१ रु० १५ आ० ५$\frac{७}{२५}$ पा० (७) ८२ पौं० १$\frac{१}{५}$ पे० ब्याज; ६०२ पौं० १३ शि० ५$\frac{१}{५}$ पे० मिश्रधन (८) ६५ पौं० ११ शि० ९ पे० (९) १०२४ पौं० ७ शि० ७$\frac{१}{५}$ पे० (१०) ४१४ पौं० ११ शि० ८ पे० (११) ३६१ पौं० ८ शि० ६$\frac{६}{७}$ पे० (१२) $\frac{६९}{१०४}$ प्रति शत (१३) २$\frac{३}{७०२}$ वर्ष (१४) ११५६ रु० ११ आ० ८ पा० (१५) २५ वर्ष (१६) ५ प्रति शत (१७) १० वर्ष (१८) १५२० पौंड (१९) १५ वर्ष (२०) ८०० रु० मूलधन ; ४ प्रति शत

१३ दशकुमारचरित–परीक्षोपयोगी बालविबोधिनी–बालक्रीडा संस्कृत हिन्दी टीका सहित। पूर्वपीठिका तथा प्रथम और अष्टम उच्छ्वास ।।)
केवल पूर्वपीठिका मात्र ।)

१४ शिशुपालवध–अत्युत्तम परीक्षोपयोगी सुधानाम्नीटीका तथा मल्लिनाथी टीका सहित। मल्लिनाथ कृत सर्वङ्कषाटीका–अन्वय–सुधाव्याख्या–कोश–समासादि–व्याकरण–वाच्यपरिवर्तन–तात्पर्यार्थ–हिन्दीभाषार्थ–टिप्पणीयां–संक्षिप्तकथायें–परीक्षोपयोगी प्रश्नपत्र सहित। १–२ सर्ग ॥=)

१५ शिशुपालवध—अत्युत्तम परीक्षोपयोगी सुधानाम्नी टीका सहित। अन्वय–सुधाव्याख्या–कोश–समासादि–व्याकरण–वाच्यपरिवर्तन–तात्पर्यार्थ–हिन्दीभाषाथ–टिप्पणियां–संक्षिप्तकथायें–परीक्षोपयोगी प्रश्नपत्र सहित
१–२ सर्ग ।।।

१६ शिशुपालवध–सान्वय–मल्लिनाथी टीका सहित १–२ सर्ग ।)
तथा १–३ सर्ग ।=)

१७ तर्कसंग्रह—दीपिकाटीका—परीक्षोपयोगी मयूखटीका—टिप्पणी तथा हिन्दी अनुवाद सहित ॥=)

१८ तर्कमकरन्द–तर्कसंग्रह दीपिका की प्रश्नोत्तरी। ≋)

१९ चन्द्रालोक—(सोदाहरण–व्याख्या सहित) परिक्षोपयोगी–पौर्णमासी संस्कृत टीका–कथाभट्टी हिन्दी टीका प्रश्नपत्र सहित १)

२० चन्द्रालोक–परीक्षोपयोगी गागाभट्ट कृत रागागम टीका सहित २)

२१ कुमारसम्भव–महाकाव्य–परीक्षोपयोगी पुंसवनी टीका सहित। मूल श्लोक तथा प्रत्येक श्लोकों का हिन्दीपद्यानुवाद–अन्वय–पुंसवनीव्याख्या–व्युत्पत्ति–भावार्थ–हिन्दीभाषार्थ प्रश्नपत्र सहित १–७ सर्ग १।)

२२ हर्षचरित–प्रथम उच्छ्वास परीक्षोपयोगी जयश्रीव्याख्या सहित ॥=)

२३ वृत्तरत्नाकर–अत्युत्तम सरल परीक्षोपयोगी नारायणी टीका टिप्पणी–उदाहरण–श्रुतबोध–छन्दोमञ्जरी–सुवृत्ततिलक सहित १।)

२४ काव्यमीमांसा–परीक्षोपयोगी चन्द्रिका टीका सहित १–५ अध्याय ॥)

२५ काव्यमीमांसा–परीक्षोपयोगी मधुसूदनी व्याख्या सहित। संपूर्ण २)

२६ स्वप्नवासवदत्ता नाटक–अत्युत्तम सरल परीक्षोपयोगी प्रबोधिनी और प्रकाश नामक संस्कृत हिन्दी टीका सहित १)

२७ अलङ्कारसारमञ्जरी–भाषा विवृति सहित। ।)

प्राप्तिस्थानम्—चौखम्बा संस्कृत पुस्तकालय, बनारस।

प्रकाशित होगया ! प्रकाशित होगया !! प्रकाशित होगया !!!

बनारस गवर्नमेण्ट संस्कृत कालेज, मध्यमा परीक्षा प्रथम खण्ड के साधारण पत्र में निर्धारित—

फलितज्यौतिष—संवत्, अयन, ऋतु, मास, पक्ष, तिथि, राशि, ग्रह, नक्षत्र का—

पञ्चाङ्गोपयोगी ज्ञान के लिए

पञ्चाङ्गविज्ञानम्

रचयिता—श्री दीनानाथ झा, ज्यो० ती० ज्यो० शा० सा० रत्न

निरीक्षक—पं० श्री मुरलीधरठक्कुर, ज्यो० आ० ज्यो० तीर्थ

यह ग्रन्थ नवीन नियमावली में निर्दिष्ट होडाचक्र तथा और भी अन्य पञ्चाङ्गोपयोगी ग्रन्थों के आधार पर उपरोक्त सभी विषयों से युक्त कोमलमति विद्यार्थियों तथा जन साधारण के लाभ के हेतु सरल हिन्दी टीका तथा उदाहरणों से सुशोभित कर प्रकाशित किया गया है। मेरा दृढ विश्वास है कि इस पुस्तक के एकबार भी अवलोकन करने से बिना गुरु की सहायता विद्यार्थी सरलता पूर्वक परीक्षा में पूर्ण सफलता प्राप्त कर सकता है। जन साधारण भी इस एक ही पुस्तक से पञ्चाङ्ग सम्बन्धी सभी बातें ज्ञात कर सकते हैं। विशेष प्रशंसा व्यर्थ। हमारे कथन की प्रामाणिकता आप स्वयं पुस्तक से सिद्ध कर सकते हैं।

मूल्य बहुत ही अल्प नाम मात्र ≤) नेट ≡)॥

प्रत्येक प्रान्तों की संस्कृत परीक्षा तथा भारतवर्ष एवं विदेश में छपी सभी संस्कृत पुस्तकों के मिलने का एक मात्र प्राचीन स्थान—

जयकृष्णदास हरिदासगुप्त—

चौखम्बा संस्कृत पुस्तकालय, बनारस सिटी।

पुस्तकों का बड़ा सूचीपत्र मंगवाइए।